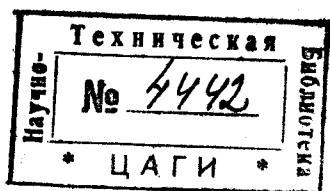


Труды Центрального аэро-гидродинамического института
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 194

Е. Е. СОЛОДКИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОПЛАННОГО КРЫЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

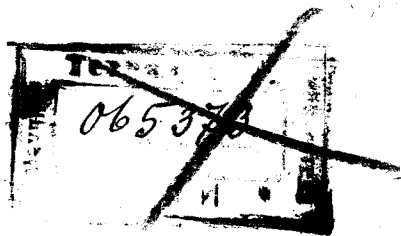


ИЗДАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе изложен метод расчета монопланного крыла I. Lotz*, разработанный нами для частных видов крыльев. Благодаря разложению функций угла атаки и хорды крыла, указанный метод дает возможность решить задачу о крыле произвольной формы и приводит к системе линейных уравнений, которая просто решается методом последовательных приближений (итераций), причем сходимость настолько быстрая, что уже третье приближение практически не дает новых значений неизвестных.

Работа состоит из трех частей: первая часть посвящена выводу основного интегрального уравнения и решению его методом I. Lotz. Там же даны выводы формул для подъемной силы, индуктивного сопротивления и момента тангажа. Вторая часть содержит разработку этого метода для крыльев, наиболее употребительных на практике. Полученные результаты представлены в виде таблиц и графиков. В третьей части указанный метод разработан для крыльев с элеронами и закрылками и выведены формулы для добавочной подъемной силы, индуктивного сопротивления и моментов крена и рысканья.



* Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. ZFM, № 7, 1931.

Отв. редактор *В. Л. Александров*

Техн. редактор *И. А. Борунов*

Сдано в набор 11 января 1935 г. Подписано к печати 31/VIII 1935 г. 4 $\frac{1}{4}$ авт. листа.
Количество печатных знаков в бум. л. 132.000. Уполномоченный Главлита № В-15881.
Тираж 1000 Ст. ф. 72×105. Бум. л. 2 $\frac{1}{2}$. Зак. тип. № 27.

Типография „Коминтерн“ и школа ФЗУ имени КИМ'а. Ленинград, Красная ул., 1.

ОТ АВТОРА

Настоящая работа проведена в Крыловой Бригаде Секции Аэродинамики Самолета ЭАО ЦАГИ в 1932—1933 г.

Вся счетная и чертежная работа выполнена под руководством автора техником Е. Я. Разореновой, которой автор приносит свою глубокую благодарность.

Е. Е. Солодкин

Август 1934 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Краткое содержание	2
От автора	3
Принятые обозначения	5
 Глава I. Решение задачи о монопланном крыле методом J. Lotz	 7
Подъемная сила крыла	11
Индуктивное сопротивление крыла	12
Момент тангажа крыла	13
 Глава II. Применения метода J. Lotz к решению некоторых частных видов крыльев	 14
Прямоугольное крыло	15
1. Постоянный угол атаки по размаху крыла	16
2. Угол атаки, изменяющийся по линейному закону по размаху крыла	18
Трапецевидное крыло	20
1. Угол атаки, постоянный по размаху крыла	26
2. Угол атаки, изменяющийся по гиперболическому закону, по размаху крыла	27
Трапецевидное крыло с прямоугольным центропланом	31
1. Угол атаки, постоянный по размаху крыла	40
2. Угол атаки, постоянный по центроплану и изменяющийся по гиперболическому закону по трапецевидной части крыла	42
Эллиптическое крыло	49
 Глава III. Решение задачи о крыле с элеронами и закрылками методом J. Lotz	 51
Крыло с элеронами	52
Момент крена	55
Добавочное индуктивное сопротивление	57
Момент рысканья	58
Крыло с закрылками	60
Добавочная подъемная сила	63
Добавочное индуктивное сопротивление	64
Summary	68

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

S — площадь крыла.

l — размах крыла.

z — координата вдоль крыла.

$\theta = \arccos \left(-\frac{2z}{l} \right)$

$b, b(z)$ — хорда крыла в точке z .

\bar{b} — хорда среднего сечения крыла.*

$\lambda = \frac{l^2}{S}$ — удлинение крыла.

$\alpha, \alpha(z)$ — геометрический угол атаки в точке z .*

$\bar{\alpha}$ — геометрический угол атаки среднего сечения крыла.

$\alpha', \alpha'(z)$ — истинный угол атаки в точке z .

$\alpha_i = \frac{W}{V} = \alpha - \alpha'$ — угол скоса в точке z .

ρ — массовая плотность воздуха.

V — скорость полета.

$\Gamma, \Gamma(z)$ — циркуляция вокруг крыла в точке z .

W — индуцированная скорость в точке z

P — подъемная сила крыла.

$C_y = \frac{P}{\rho S V^2}$ — коэффициент подъемной силы.

Q_i — индуктивное сопротивление крыла.

$C_i = \frac{Q_i}{\rho S V^2}$ — коэффициент индуктивного сопротивления.

M — момент тангажа крыла.

$C_{mz} = \frac{M}{\rho S V^2 l}$ — коэффициент момента тангажа

M_x — момент крена крыла.

$C_{mx} = \frac{M_x}{\rho S V^2 l}$ — коэффициент момента крена.

M_y — момент рысканья крыла.

$C_{my} = \frac{M_y}{\rho S V^2 l}$ — коэффициент момента рысканья.

$a = \frac{dC_y}{d\alpha}$ — наклон прямолинейного участка коэффициента подъемной силы в зависимости от углов атаки.

* Все величины, относящиеся к среднему сечению крыла, обозначены сверху чертой.

** Углы атаки всегда измеряются от такого положения крыла, при котором подъемная сила обращается в нуль.

a_o — наклон прямолинейного участка коэффициента подъемной силы для профиля в плоско-параллельном потоке.

$\dot{\alpha}_o$ — угол атаки при $C_y = 0$.

$m = -\frac{dC_m}{dC_y}$ — наклон кривой $C_m = f(C_y)$.

C_{mo} — коэффициент момента тангажа при $C_y = 0$.

A_n — коэффициенты разложения циркуляции в ряд Фурье.

B_n — коэффициенты разложения функции угла атаки в ряд Фурье.

C_{zk} — коэффициенты разложения функции хорды крыла в ряд Фурье.

e — толщина профиля.

σ — относительная толщина профиля.

h — вогнутость профиля.

δ — относительная вогнутость профиля.

Глава I

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МОНОПЛАННОМ КРЫЛЕ МЕТОДОМ I. LOTZ

В основу теории крыла конечного размаха положена гидродинамическая схема Прандтля,* в которой несущая поверхность заменена пространственной системой вихрей. Расположение последних подобрано таким образом, что создаваемое ими поле скоростей соответствовало бы физической картине обтекания крыла. Чтобы облегчить преодоление математических трудностей, встающих на пути разрешения этой задачи, Прандтль полагает, что хорда и толщина крыла малы по сравнению с размахом, и заменяет несущую поверхность вихревым шнуром, проходящим через центры тяжести вихрей, распределенных по отдельным сечениям, и напряжение которого в каждом сечении равно полной циркуляции вокруг него. Тогда в любом сечении поток вблизи крыла можно рассматривать как плоский и, следовательно, можно воспользоваться формулой Жуковского для подъемной силы элемента крыла:

$$dP = \rho V \Gamma dz;$$

с другой стороны, подъемная сила элемента крыла может быть выражена через абсолютный коэффициент C_y :

$$dP = C_y \rho V^2 b dz.$$

Сравнивая правые части этих равенств, получаем:

$$\Gamma = C_y b V \quad (1)$$

Если измерение углов атаки всегда производить от такого положения крыла, при котором подъемная сила обращается в нуль, то для прямолинейного участка коэффициента подъемной силы справедливо следующее равенство:

$$C_y = a_0 \alpha' \quad (2)$$

Истинный угол атаки α' , в соответствии с теорией крыла Прандтля, в каждом сечении размаха связан с геометрическим углом атаки и углом скола соотношением:

$$\alpha' = \alpha - \frac{w}{V} \quad (3)$$

Подставляя выражение (2) в условие (1) и, вместе с тем, заменяя α' его значением (3), получим:

$$\Gamma = a_0 b V \left(\alpha - \frac{w}{V} \right) \quad (4)$$

* Прандтль, „Теория несущего крыла“, ч. I. ГНТИ — 1931 г. Тр е ф т ц. „К теории крыла Прандтля“. „Mathematische Annalen“. 1921 В. 2. Б е т ц. „Теория крыла“. „Berichte und Abhandlungen“, № 2. 1920.

При заданном законе циркуляции $\Gamma(z)$ нормальная индуцированная скорость в некоторой фиксированной точке размаха z_1 представится следующим образом: *

$$W(z_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{dz} \frac{dz}{z - z_1}, \quad (5)$$

где под интегралом в формуле (5) следует понимать его главное значение. Заменяя $W(z)$ в формуле (4) ее выражением (5), получим следующее основное уравнение для определения циркуляции $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = a_0 b V \left[\alpha - \frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{dz} \frac{dz}{z - z_1} \right] \quad (6)$$

Изложим приближенный метод решения этого уравнения, предложенный I. Lotz.

Разделим обе части равенства на $a_0 b V$:

$$\frac{\Gamma}{a_0 b V} = \alpha - \frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{dz} \frac{dz}{z - z_1}$$

и разрешим его относительно α :

$$\alpha(z) = \frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{dz} \frac{dz}{z - z_1} + \frac{\Gamma}{a_0 b V} \quad (7)$$

Сделаем замену переменных:

$$z = -\frac{l}{2} \cos \theta \quad (8)$$

Когда „ z “ перемещается от левого конца крыла к правому, угол θ принимает последовательно все значения от 0 до π (см. фиг. 1).

Циркуляцию $\Gamma(z)$ представим в виде ряда Фурье:

$$\Gamma = a_0 b V \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (9)$$

Из выражения (9)

$$\frac{\Gamma}{a_0 b V} = \frac{\bar{b}}{b(z)} \sum A_n \sin n\theta.$$

Интегрирование выражения угла скоса дает:

$$\frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{dz} \frac{dz}{z - z_1} = -\frac{a_0 \bar{b}}{2l} \sum n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad ** \quad (10)$$

Наконец, разложим угол атаки $\alpha(z)$, умноженный на $\sin \theta$, в ряд по $\sin n\theta$:

$$\alpha(z) \sin \theta = \sum B_n \sin n\theta \quad (11)$$

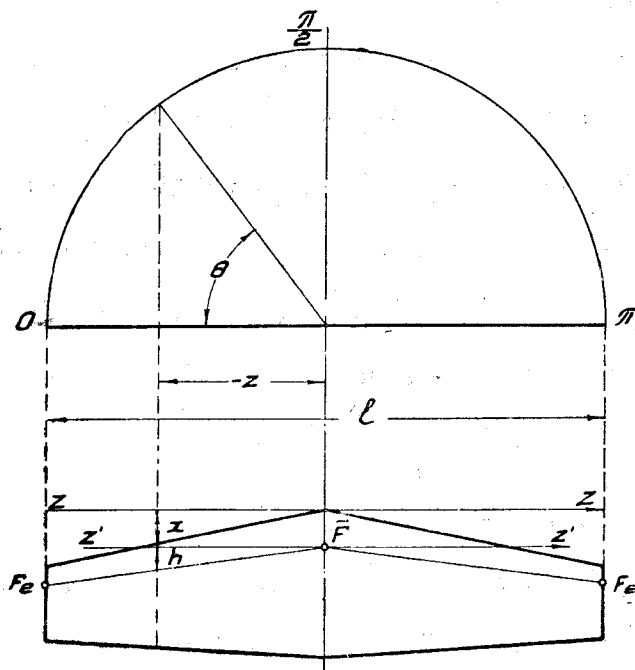
* Прандтль. „Теория несущего крыла“, ч. I. ГНТИ — 1931 г.

** Голубев В. В. „Теория крыла аэроплана конечного размаха“. ГНТИ. 1931 г. Приложение 1-е.

тогда исходное уравнение (7) представится в виде:

$$\sum B_n \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} = \frac{\bar{b}}{b(z)} \sum A_n \sin n \theta + \bar{\mu} \sum n A_n \frac{\sin n \theta}{\sin \theta}, \quad (12)$$

где $\bar{\mu} = \frac{a_0 \bar{b}}{2l}$ — характеристическая константа среднего сечения.



Фиг. 1.

При крыле любой формы в плане, но симметричном относительно средней линии $z=0$; выражение $\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta$ можно разложить в ряд по $\cos 2k \theta$:

$$\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta = \sum C_{2k} \cos 2k \theta, \quad (13)$$

тогда уравнение (12) напишется:

$$\sum B_n \sin n \theta = \sum_n A_n \sin n \theta \sum_k C_{2k} \cos 2k \theta + \bar{\mu} \sum n A_n \sin n \theta \quad (14)$$

Произведение рядов и выражений (14) можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} \sum_n A_n \sin n \theta \sum_k C_{2k} \cos 2k \theta &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n, k} A_n C_{2k} \sin (n+2k) \theta + \frac{1}{2} \sum_{n, k} A_n C_{2k} \sin (n-2k) \theta. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (14), будем окончательно иметь:

$$\begin{aligned} \sum B_n \sin n \theta &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n, k} A_n C_{2k} \sin (n+2k) \theta + \sum_{n, k} A_n C_{2k} \sin (n-2k) \theta \right] + \\ &+ \bar{\mu} \sum n A_n \sin n \theta. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при синусах одинаковых дуг, получим систему уравнений для определения неизвестных A_n :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{2} \left[(C_0 - C_2) A_1 + (C_2 - C_4) A_3 + (C_4 - C_6) A_5 + (C_6 - C_8) A_7 + \dots \right] + \bar{\mu} A_1. \\
 B_2 &= \frac{1}{2} \left[(C_0 - C_4) A_2 + (C_2 - C_6) A_4 + (C_4 - C_8) A_6 + (C_6 - C_{10}) A_8 + \dots \right] + 2\bar{\mu} A_2. \\
 B_3 &= \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_4) A_1 + (C_0 - C_6) A_3 + (C_2 - C_8) A_5 + (C_4 - C_{10}) A_7 + \dots \right] + 3\bar{\mu} A_3. \\
 B_4 &= \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_6) A_2 + (C_0 - C_8) A_4 + (C_2 - C_{10}) A_6 + (C_4 - C_{12}) A_8 + \dots \right] + 4\bar{\mu} A_4. \\
 B_5 &= \frac{1}{2} \left[(C_4 - C_6) A_1 + (C_2 - C_8) A_3 + (C_0 - C_{10}) A_5 + (C_2 - C_{12}) A_7 + \dots \right] + 5\bar{\mu} A_5. \quad (15) \\
 B_6 &= \frac{1}{2} \left[(C_4 - C_8) A_2 + (C_2 - C_{10}) A_4 + (C_0 - C_{12}) A_6 + (C_2 - C_{14}) A_8 + \dots \right] + 6\bar{\mu} A_6. \\
 B_7 &= \frac{1}{2} \left[(C_6 - C_8) A_1 + (C_4 - C_{10}) A_3 + (C_2 - C_{12}) A_5 + (C_0 - C_{14}) A_7 + \dots \right] + 7\bar{\mu} A_7. \\
 B_8 &= \frac{1}{2} \left[(C_6 - C_{10}) A_2 + (C_4 - C_{12}) A_4 + (C_2 - C_{14}) A_6 + (C_0 - C_{16}) A_8 + \dots \right] + 8\bar{\mu} A_8. \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_2) + \bar{\mu} \right] A_1 &= B_1 \mid - \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_4) A_3 - (C_4 - C_6) A_5 - (C_6 - C_8) A_7 - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_4) + 2\bar{\mu} \right] A_2 &= B_2 \parallel - \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_6) A_4 - (C_4 - C_8) A_6 - (C_6 - C_{10}) A_8 - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_6) + 3\bar{\mu} \right] A_3 &= B_3 - \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_4) A_1 \mid - (C_2 - C_8) A_5 - (C_4 - C_{10}) A_7 - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_8) + 4\bar{\mu} \right] A_4 &= B_4 - \frac{1}{2} \left[(C_2 - C_6) A_2 \parallel - (C_2 - C_{10}) A_6 - (C_4 - C_{12}) A_8 - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_{10}) + 5\bar{\mu} \right] A_5 &= B_5 - \frac{1}{2} \left[(C_4 - C_6) A_1 \mid - (C_2 - C_8) A_3 \mid - (C_2 - C_{12}) A_7 - \dots \right] \quad (15') \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_{12}) + 6\bar{\mu} \right] A_6 &= B_6 - \frac{1}{2} \left[(C_4 - C_8) A_2 \parallel - (C_2 - C_{10}) A_4 \parallel - (C_2 - C_{14}) A_8 - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_{14}) + 7\bar{\mu} \right] A_7 &= B_7 - \frac{1}{2} \left[(C_6 - C_8) A_1 \mid - (C_4 - C_{10}) A_3 \mid - (C_2 - C_{12}) A_5 \mid - \dots \right] \\
 \left[\frac{1}{2}(C_0 - C_{16}) + 8\bar{\mu} \right] A_8 &= B_8 - \frac{1}{2} \left[(C_6 - C_{10}) A_2 \parallel - (C_4 - C_{12}) A_4 \parallel - (C_2 - C_{14}) A_{11} \parallel - \dots \right] \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Система уравнений (15) распадается на две системы; одна содержит в себе только нечетные, другая только четные коэффициенты. Если угол атаки симметричен относительно середины крыла, мы имеем только нечетную систему. Если угол атаки на одной половине крыла является зеркальным изображением угла атаки другой половины крыла (например, эффект отклонения элеронов), мы имеем только четную систему. Наконец, в общем случае, при несимметричном угле атаки относительно середины крыла имеем как нечетную, так и четную систему.

Коэффициенты A_n быстро убывают, так что достаточно ограничиться первыми четырьмя—шестью из них, чтобы получить хорошее приближение для значений подъемной силы и индуктивного сопротивления крыла. Поэтому обычно на практике система (15) сводится к системе четырех—шести линейных уравнений.

Весьма важным свойством этой системы является также возможность решения ее методом последовательных приближений (итераций), который в основном состоит в следующем:

Пусть дана система n линейных уравнений:

$$\varphi_1(x_1; x_2; x_3; \dots x_n) = 0$$

$$\varphi_2(x_1; x_2; x_3; \dots x_n) = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n(x_1; x_2; x_3; \dots x_n) = 0$$

Представим данные уравнения в виде:

$$x_1 = f_1(x_1; x_2; x_3; \dots x_n)$$

$$x_2 = f_2(x_1; x_2; x_3; \dots x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = f_n(x_1; x_2; x_3; \dots x_n)$$

Если каким-либо образом могут быть определены приближенные значения неизвестных $(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)} \dots x_n^{(0)})$, то последующие приближения будут: *

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= f_1(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)}; \dots x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= f_2(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)}; \dots x_n^{(0)}) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^{(1)} &= f_n(x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; x_3^{(0)}; \dots x_n^{(0)}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{1-е прибли-} \\ \text{жение} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= f_1(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; x_3^{(1)}; \dots x_n^{(1)}) \\ x_2^{(2)} &= f_2(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; x_3^{(1)}; \dots x_n^{(1)}) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^{(2)} &= f_n(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; x_3^{(1)}; \dots x_n^{(1)}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{2-е прибли-} \\ \text{жение} \end{array}$$

и т. д. до тех пор, пока следующее приближение уже не дает новых значений неизвестных.

В нашем случае решение системы ведем следующим образом: представляем систему уравнений (15) в виде (15'). Для определения нулевого приближения употребляем только члены, стоящие в системе до вертикальной линии. Следующие приближения получаем по вышеизложенной схеме, причем сходимость настолько быстрая, что уже третье приближение почти не дает новых значений неизвестных.

Зная коэффициенты A_n , не трудно определить подъемную силу, индуктивное сопротивление и момент тангажа крыла.

Подъемная сила крыла

Подставив в выражение подъемной силы циркуляцию $\Gamma(z)$, представленную рядом (9), получим:

$$P = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho V \Gamma dz = \frac{1}{2} l \rho V^2 a_0 \bar{b} \sum A_n \int_0^\pi \sin n \theta \sin \theta d\theta.$$

* На условии сходимости процесса итерации мы не останавливаемся; интересующимся можем рекомендовать книгу Дж. Скарборо "Численные методы математического анализа" ГТТИ — 1934 г.

Вычислим интеграл:

$$\int_0^{\pi} \sin n \theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } n=1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1, \end{cases}$$

тогда

$$P = \frac{1}{2} \pi l^2 \rho V^2 \bar{\mu} A_1.$$

Представим подъемную силу крыла через абсолютный коэффициент C_y :

$$P = C_y \rho S V^2.$$

Сравнивая эти выражения, будем иметь:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\mu} A_1. \quad (16)$$

Индуктивное сопротивление крыла

Теперь перейдем к определению индуктивного сопротивления крыла. В выражение последнего, кроме циркуляции $\Gamma(z)$, входит еще вертикальная скорость $W(z)$, которую заменим ее значением из (10), тогда:

$$\begin{aligned} Q_i &= \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho \Gamma W dz = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} l \rho V_{a_0} \bar{b} \sum A_m \int_0^{\pi} \sin m \theta d\theta \right\} \left\{ \bar{\mu} V \sum n A_n \int_0^{\pi} \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \right\} = \\ &= \rho l^2 \bar{\mu}^2 \sum_{m,n} n A_n A_m \int_0^{\pi} \sin n \theta \sin m \theta d\theta; \end{aligned}$$

но интеграл:

$$\int_0^{\pi} \sin n \theta \sin m \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } m=n \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Следовательно:

$$Q_i = \frac{1}{2} \pi l^2 \rho V^2 \bar{\mu}^2 \sum^n A_n^2.$$

Положив

$$N = \frac{\sum^n n A_n^2}{A_1^2},$$

получим:

$$Q_i = \frac{2N}{\pi l^2 \rho V^2} P^2.$$

Выразим индуктивное сопротивление крыла через абсолютный коэффициент C_i :

$$Q_i = C_i \rho S V^2.$$

Из сравнения правых частей этих равенств следует:

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2 \quad (17)$$

Момент тангажа крыла

Вычисление момента тангажа крыла будем вести относительно прямой, параллельной размаху и проходящей через переднюю кромку среднего сечения. Для простоты изложения нами будет использовано понятие фокуса крыла.

Фокусом крыла называется точка, относительно которой момент тангажа остается постоянным для всех углов атаки. Расстояние последнего от передней кромки, как легко показать, равно градиенту прямой $C_m = f(C_y)$.

Действительно, момент тангажа относительно фокуса может быть представлен следующим образом:

$$M_F = M_z - P\bar{x},$$

где M_z момент относительно передней кромки.

Разделив равенство на $\rho S V^2$, получим:

$$C_{mF} = C_{mz} - \frac{x}{b} C_y = C_{m_0} + \left(m - \frac{x}{b}\right) C_y.$$

Постоянство момента будет соблюдено, если

$$m - \frac{x}{b} = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{x}{b} = m.$$

Теперь переходим непосредственно к решению поставленной задачи. На основании предыдущих соображений момент элемента крыла относительно оси zz (см. фиг. 1) представится в виде:

$$dM = dM_F + dP(h - \bar{x}) = C_{m_0} \rho V^2 b^2 dz + (h + \bar{x}) \rho V \Gamma dz.$$

где $h + \bar{x}$ — расстояние фокуса элемента крыла до оси zz .

Следовательно, момент тангажа крыла равен:

$$M_z = 2\rho V^2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 C_{m_0} b^2 dz + P\bar{x} + 2\rho V^2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 h \Gamma dz.$$

Сделаем следующую подстановку:

$$z = -\frac{l}{2} \cos \theta; \quad dz = \frac{l}{2} \sin \theta; \quad \Gamma = a_0 \bar{b} V \sum A_n \sin n\theta,$$

тогда будем иметь:

$$M_z = \rho V^2 l \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} C_{m_0} b^2 \sin \theta d\theta + a_0 \bar{b} \sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} h \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] + P\bar{x}.$$

Выразим момент тангажа крыла через абсолютный коэффициент C_{mz}

$$M_z = C_{mz} \rho S V^2 \bar{b}.$$

Сравнивая правые части, получим:

$$C_{mz} = \frac{l}{S\bar{b}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} C_{m_0} b^2 \sin \theta d\theta + a_0 \bar{b} \sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} h \sin n\theta \sin \theta d\theta \right] + \bar{m} C_y. \quad (18)$$

Глава II

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА I. LOTZ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ВИДОВ КРЫЛЬЕВ

В предыдущей главе выведено основное интегральное уравнение для определения циркуляции и дан приближенный метод его решения. Ниже этот метод разработан для некоторых частных видов крыльев, имеющих применение на практике. На примере их решения показано, как практически пользоваться изложенным методом, и намечены пути решения задачи при любой форме крыла.

Обратимся снова к системе уравнений (15) гл. I. Практически, чтобы решить эту систему, т. е. чтобы определить неизвестные A_n , требуется знание величин B_n и C_{2k} . Последние являются коэффициентами разложения

в ряд Фурье функции угла атаки и хорды крыла: $\alpha(z) \sin \theta$ и $\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta$.

Отсюда план решения задачи таков: имея конкретное крыло, мы выражаем аналитически закон изменения угла атаки и хорды по размаху крыла; определяем B_n и C_{2k} — коэффициенты разложений (11) и (13) гл. I и полученные результаты подставляем в систему уравнений (15) гл. I.

Теперь остановимся на весьма важном вопросе: как практически определить закон изменения хорды $b(z)$ и угла атаки $\alpha(z)$ по размаху крыла. В отношении хорды вопрос решается довольно просто по чертежу крыла в плане. Математических трудностей не встречается, так как контуры крыльев ограничены обычно прямыми линиями или такими кривыми, уравнения которых известны. Труднее обстоит дело с определением закона изменения угла атаки по размаху крыла. Последний изменяется самым разнообразным образом. Тем не менее возможно выделить основные два случая: 1) геометрическую закрутку крыла, когда изменяется положение сечений по размаху, образуя некоторый угол между хордой элемента и хордой среднего сечения, и 2) аэродинамическую закрутку, когда все хорды лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, а изменение угла атаки по размаху происходит вследствие изменения для разных сечений угла атаки, при котором подъемная сила обращается в нуль. На практике обычно встречается сочетание первого и второго случая, тогда задача решается путем их последовательного учета.

В первом случае закон изменения угла атаки по размаху может быть определен по чертежу крыла. Значительно большую трудность представляет определение этого закона при аэродинамической закрутке, но, как будет показано ниже, его можно определить косвенным путем через геометрические параметры крыла.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением крыльев только с аэродинамической закруткой, при которой изменение углов атаки по размаху происходит за счет изменения угла нулевой подъемной.

Систематическая обработка опытного материала * показала, что угол нулевой подъемной силы α_0 зависит от двух параметров: относительной вогнутости профиля и от положения максимальной ординаты осевой дуги (второстепенный параметр). Так как в большинстве случаев все сечения крыла получаются из модификации по толщине одного и того же профиля, влияние второго параметра отпадает, и задача об определении закона изменения угла атаки сводится к определению закона изменения относительной вогнутости по размаху крыла. Новая задача облегчается тем обстоятельством, что модификация крыльев по размаху производится обычно двумя способами: 1) осевая дуга профиля остается постоянной, тогда относительная вогнутость и, следовательно, угол атаки по размаху остается постоянным и 2) осевая дуга профиля изменяется пропорционально относительной толщине (конические крылья), тогда изменение относительной вогнутости и угла атаки следует за изменением относительной толщины, величине вполне наглядной и хорошо известной конструктору самолета. Ниже, на конкретных примерах, мы используем все указанные возможности определения закона изменения угла атаки по размаху крыла.

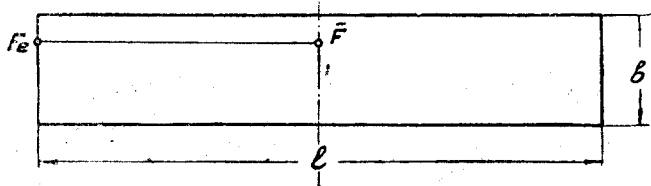
Наконец, остановимся на величине C_{m_0} — коэффициенте момента профиля при $C_y = 0$, который нам потребуется при выходе формулы момента тангажа конкретных крыльев. По данным систематической обработки опытного материала ** величина C_{m_0} зависит от тех же параметров, что и угол нулевой подъемной силы, следовательно, все сказанное относительно определения закона изменения угла атаки по размаху крыла остается верным для величины C_{m_0} .

Прямоугольное крыло

Определим, какое значение примут в этом случае величины C_{2k} . Они являются коэффициентами разложения в ряд функции хорды крыла:

$$\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta \text{ по } \cos 2k\theta.$$

$$\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta = \sum C_{2k} \cos 2k\theta.$$



Фиг. 2.

В случае прямоугольного крыла (см. фиг. 2) $\bar{b}(z) = \text{const} = \bar{b}$ и указанное разложение примет вид:

$$\sin \theta = \sum C_{2k} \cos 2k\theta,$$

но $\sin \theta$, как известно, разлагается в следующий ряд:

$$\sin \theta = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2\theta}{1.3} + \frac{\cos 4\theta}{3.5} + \frac{\cos 6\theta}{5.7} + \dots \right],$$

* Оглоблин А. П., „Систематические исследования крыльев“, труды ЦАГИ, вып. 145. Остославский И. В., „О соотношении между аэродинамикой крыла и его геометрическими размерами“, труды СНИИ ГВФ, вып. 2. 1935 г.

** Ibid.

откуда коэффициенты C_{2k} соответственно равны:

$$C_{2k} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \quad (1)$$

(где $k=0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$).

Из выражения (1) следует, что коэффициенты C_{2k} имеют одинаковое значение для всех прямоугольных крыльев. Воспользовавшись этим обстоятельством и приняв во внимание, что для прямоугольных крыльев достаточно ограничиться первыми четырьмя коэффициентами A_n , чтобы получить хорошее приближение для подъемной силы и индуктивного сопротивления, систему уравнений (15) гл. I можно представить следующим образом.

Система уравнений с нечетными коэффициентами:

$$\begin{aligned} (0,8488 + \bar{\mu}) A_1 &= B_1 + 0,1698 A_3 + 0,0242 A_5 + 0,0081 A_7 \\ (0,6548 + 3\bar{\mu}) A_3 &= B_3 + 0,1698 A_1 + 0,2021 A_5 + 0,0360 A_7 \\ (0,6430 + 5\bar{\mu}) A_5 &= B_5 + 0,0242 A_1 + 0,2021 A_3 + 0,2078 A_7 \\ (0,6394 + 7\bar{\mu}) A_7 &= B_7 + 0,0081 A_1 + 0,0360 A_3 + 0,2078 A_5 \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений с четными коэффициентами:

$$\begin{aligned} (0,6791 + 2\bar{\mu}) A_2 &= B_2 + 0,1940 A_4 + 0,0323 A_6 + 0,0118 A_8 \\ (0,6467 + 4\bar{\mu}) A_4 &= B_4 + 0,1940 A_2 + 0,2058 A_6 + 0,0380 A_8 \\ (0,6411 + 6\bar{\mu}) A_6 &= B_6 + 0,0323 A_2 + 0,2058 A_4 + 0,2089 A_8 \\ (0,6391 + 8\bar{\mu}) A_8 &= B_8 + 0,0118 A_2 + 0,0380 A_4 + 0,2089 A_6 \end{aligned} \quad (2')$$

Теперь определим значения величин B_n , являющихся коэффициентами разложения в ряд функции угла атаки $\alpha(z) \sin \theta$ по $\sin n\theta$

$$\alpha(z) \sin \theta = \sum B_n \sin n\theta.$$

Для прямоугольного крыла рассмотрим два случая изменения угла атаки по размаху крыла.

1. Постоянный угол атаки по размаху крыла

В этом случае $\alpha(z) = \text{const} = \bar{\alpha}$, следовательно, предыдущее разложение напишется:

$$\bar{\alpha} \sin \theta = \sum B_n \sin n\theta.$$

Из сравнения коэффициентов при синусах одинаковых дуг следует:

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases} \quad (3)$$

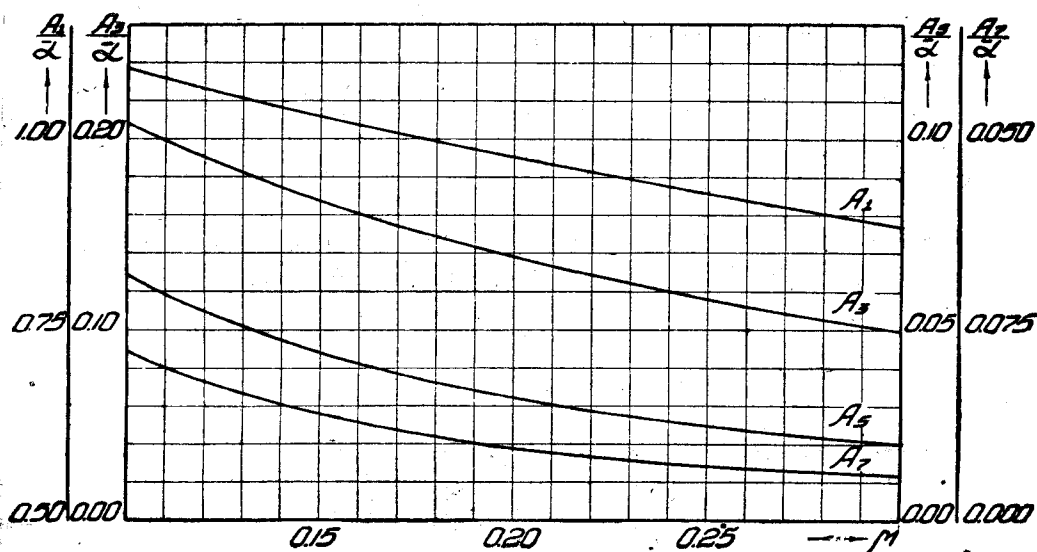
Подставив полученные значения B_n в систему уравнений (2), определим коэффициенты A_n , которые в данном случае пропорциональны $\bar{\alpha}$:

$$A_n = A'_n \bar{\alpha}.$$

Численные значения $A'_n = \frac{A_n}{\bar{\alpha}}$ в зависимости от параметра $\bar{\mu}$ представлены в таблице 1 и на фиг. 3.

Таблица 1.

$\frac{A_n}{\alpha}$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$\frac{A_1}{\alpha}$	1,0931	1,0307	0,9765	0,9287	0,8856
$\frac{A_3}{\alpha}$	0,2085	0,1669	0,1375	0,1160	0,0994
$\frac{A_5}{\alpha}$	0,0641	0,0441	0,0322	0,0250	0,0199
$\frac{A_7}{\alpha}$	0,0221	0,0138	0,0096	0,0071	0,0058



Фиг. 3.

Коэффициент подъемной силы такого крыла будет:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\mu} A_1' \bar{\alpha}.$$

Коэффициент индуктивного сопротивления:

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2,$$

где величина $N = \frac{\sum n A_n'^2}{A_1'^2}$ остается постоянной для всех углов атаки.

Коэффициент момента тангажа такого крыла получим, подставив в формулу (18) (гл. I) величины: $b(z)$; $C_{m_0}(z)$ и $h(z)$, соответствующие данному крылу (см. фиг. 2):

$$b = \text{const} = \bar{b}; C_{m_0} = \text{const} = \bar{C}_{m_0}; \text{ и } h = 0;$$

получим:

$$C_{mz} = \frac{l}{Sb} \left[\overline{C_{m_0}} \overline{b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right] + \overline{m} C_y.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1,$$

тогда получим:

$$C_{mz} = C_{m_0} + \overline{m} C_y. \quad (4)$$

2. Угол атаки, изменяющийся по линейному закону по размаху крыла

Аналитически такое изменение угла атаки может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{\alpha} + \frac{2z}{l} \varepsilon \text{ при } -\frac{l}{2} \leq z \leq 0 \\ &= \overline{\alpha} - \frac{2z}{l} \varepsilon \text{ при } 0 \leq z \leq +\frac{l}{2}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \overline{\alpha} - \alpha_e$ — разность углов атаки в середине и на конце крыла.

Заменив координату z углом θ из уравнения (8) гл. I, получим:

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{\alpha} - \varepsilon \cos \theta \text{ при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ &= \overline{\alpha} + \varepsilon \cos \theta \text{ при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Разложение (10) гл. I в этом случае напишется:

$$[\overline{\alpha} \mp \varepsilon \cos \theta] \sin \theta = \sum B_n \sin n\theta.$$

Коэффициенты B_n определяются по формуле:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overline{\alpha} - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta \sin n\theta d\theta + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\overline{\alpha} + \varepsilon \cos \theta) \sin \theta \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных: $\theta = \pi - \theta'$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\overline{\alpha} + \varepsilon \cos \theta) \sin \theta \sin n\theta d\theta &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\overline{\alpha} - \varepsilon \cos \theta') \sin \theta' \sin n\theta' d\theta' = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\overline{\alpha} - \varepsilon \cos \theta) \sin \theta \sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

получим:

$$B_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\bar{\alpha} - \epsilon \cos \theta) \sin \theta \sin n \theta d\theta =$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\bar{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin n \theta d\theta - \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n \theta d\theta \right], *$$

где n — принимает только нечетные значения.

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n \theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } n=1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{\sin(n-2)\theta}{2(n-2)} - \frac{\sin(n+2)\theta}{2(n+2)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(n-2)} - \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2(n+2)}.$$

Следовательно:

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} - K_n \epsilon & \text{при } n=1 \\ -K_n \epsilon & \text{при } n \neq 1, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$K_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n-2} - \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n+2} \right] = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)(n+2)}$$

Значения K_n для первых четырех коэффициентов, которые обычно применяются на практике, численно равны:

$$K_1 = \frac{4}{3\pi} = 0,4244$$

$$K_3 = \frac{4}{5\pi} = 0,2547$$

$$K_5 = -\frac{4}{21\pi} = 0,0606$$

$$K_7 = \frac{4}{45\pi} = 0,0283.$$

Коэффициенты A_n определяются решением системы уравнений (2) при подстановке соответствующих значений B_n по формуле (5), но теперь каждый из них разлагается на сумму двух членов, один из которых пропорционален $\bar{\alpha}$, а другой ϵ

$$A_n = A'_n \bar{\alpha} - A''_n \epsilon.$$

Коэффициент подъемной силы у такого крыла равен:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\mu} (A_1' - A_1'' \epsilon).$$

* Легко видеть, что при любом изменении угла атаки, но симметричном относительно середины крыла:

$$B_{2n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha(z) \sin(2n-1)\theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(z) \sin(2n-1)\theta \sin \theta d\theta$$

и

$$B_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha(z) \sin 2n\theta \sin \theta d\theta = 0,$$

поэтому, не повторяя доказательства, в дальнейшем мы будем представлять этот интеграл в окончательном виде.

Коэффициент индуктивного сопротивления имеет тот же вид

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2,$$

но теперь величина $N = \frac{\sum n A_n^2}{A_1^2}$ изменяется вместе с углом атаки крыла.

Чтобы определить коэффициент момента тангажа этого крыла, сделаем в выражении (18) гл. I следующую подстановку:

$$b = \text{const} = \bar{b}; \quad C_{m_0} = (1 - \nu \cos \theta) \bar{C}_{m_0}; \quad \text{и } h = 0,$$

где:

$$\nu = \frac{\bar{C}_{m_0} - C_{m_0 e}}{\bar{C}_{m_0}},$$

тогда

$$C_{mz} = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \frac{\nu}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \right] \bar{C}_{m_0} + \bar{m} C_y.$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = 1.$$

Подставляя в предыдущее равенство, будем иметь:

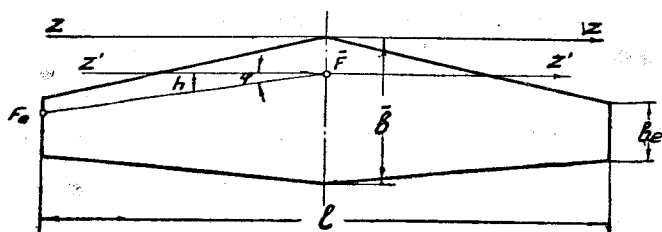
$$C_{mz} = \left[1 - \frac{\nu}{2} \right] \bar{C}_{m_0} + \bar{m} C_y.$$

Трапецевидное крыло

В случае трапецевидного крыла, закон изменения хорды по размаху крыла представится в виде (см. фиг. 4):

$$\begin{aligned} b &= \bar{b} \left(1 + \xi \frac{2z}{l} \right) & \text{при } \frac{l}{2} \leq z \leq 0 \\ &= \bar{b} \left(1 - \xi \frac{2z}{l} \right) & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \end{aligned}$$

где $\xi = \frac{\bar{b} - b_e}{\bar{b}}$ коэффициент сужения крыла.



Фиг. 4.

После замены координаты z на угол θ из уравнения (8) гл. I получим:

$$\begin{aligned} b &= \bar{b} (1 - \xi) \cos \theta & \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ &= \bar{b} (1 + \xi) \cos \theta & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Разложение (12) гл. I для определения коэффициентов C_{2k} напишется:

$$\frac{\sin \theta}{1 \mp \xi \cos \theta} = \sum C_{2k} \cos 2k \theta$$

и коэффициенты C_{2k} будут соответственно равны:

$$C_{2k} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1 - \xi \cos \theta} \cos 2k \theta d\theta.$$

Вычислим интеграл:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1 - \xi \cos \theta} \cos 2k \theta d\theta \quad (7)$$

Разложим знаменатель $1 - \xi \cos \theta$ в ряд:

$$\frac{1}{1 - \xi \cos \theta} = 1 + \xi \cos \theta + \xi^2 \cos^2 \theta + \xi^3 \cos^3 \theta + \dots$$

Подставляя в (7), получим:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos 2k \theta d\theta + \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \cos 2k \theta d\theta + \\ & + \xi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2k \theta d\theta + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^m \theta \cos 2k \theta d\theta = I_m \quad (9)$$

и займемся нахождением этого интеграла.

Предварительно напомним известные формулы:*

m — нечетное

$$\cos^m \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \cos \nu \theta,$$

где ν — принимает только нечетные значения;

m — четное

$$\cos^m \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=2}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \cos \nu \theta + \left(\frac{m}{2}\right) \frac{1}{2^m},$$

где ν — принимает только четные значения.

Подставляя в (9) будем иметь:

$$I_{m \text{ неч.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \nu \theta \cos 2k \theta d\theta \quad (10)$$

* Hütte, том 1, изд. 13-е, стр. 62.

$$I_{m \text{ четн.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=2}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \nu \theta \cos 2k \theta d\theta + \\ + \frac{1}{2^m} \left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos 2k \theta d\theta \quad (11)$$

Рассмотрим интеграл вида:

$$I_{m\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \nu \theta \cos 2k \theta d\theta \quad (12)$$

общий обеим формулам.

Разложим подынтегральную функцию:

$$\sin \theta \cos \nu \theta \cos 2k \theta = \frac{1}{2} [\sin (\nu+1) \theta - \sin (\nu-1) \theta] \cos 2k \theta = \\ = \frac{1}{4} [\sin (2k + \nu + 1) \theta - \sin (2k + \nu - 1) \theta - \sin (2k - \nu - 1) \theta + \\ + \sin (2k - \nu + 1) \theta] = \frac{1}{4} [\sin p \theta - \sin q \theta - \sin r \theta + \sin s \theta],$$

где

$$\begin{aligned} p &= 2k + \nu + 1 \\ q &= 2k + \nu - 1 \\ r &= 2k - \nu - 1 \\ s &= 2k - \nu + 1 \end{aligned}$$

Подставляя в (12) и проинтегрировав его, получим:

$$I_{m\nu} = -\frac{1}{4} \left[\frac{\cos p \theta}{p} - \frac{\cos q \theta}{q} - \frac{\cos r \theta}{r} + \frac{\cos s \theta}{s} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad (13)$$

Рассмотрим в отдельности выражение (13) при ν четном и при ν — нечетном.

ν — четно.

Нетрудно видеть, что если ν четно, то все знаменатели дробей (13) нечетны, а если так, то подстановка вместо верхнего предела $\frac{\pi}{2}$ обращает все дроби в нуль. При подстановке нижнего предела, выражение (13) принимает следующее значение:

$$I_{m\nu} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right] \quad (14)$$

Таким образом, формула (14) дает окончательное значение интеграла (12) при ν — четном.

Чтобы покончить с интегралом $I_{m \text{ четн.}}$ (11), рассмотрим, что даст второй интеграл этой формулы

$$I_{\frac{m}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos 2k \theta d\theta.$$

Для этого в (13) вместо ν поставим 0, так как $\frac{m-\nu}{2} = \frac{m}{2}$ получим:

$$I_{m, \frac{m}{2}} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right].$$

Теперь формула (11) может быть представлена в виде:

$$I_{m \text{ четн.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right] + \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right] \right\} \quad (15)$$

ν — нечетно.

Если ν — нечетно, то знаменатели дробей (14) четны и, следовательно, подстановка верхнего предела в (13) даст или $+1$ или -1 в числителях дробей. Совместно с подстановкой нижних пределов в числителях будут нули или двойки.

Легко видеть, что если знаменатели дробей (13) делятся на 4, то при подстановке $\frac{\pi}{2}$ будем получать $+1$, если же знаменатели дробей на 4 не делятся, получим -1 . При ν — нечетном один из знаменателей может обратиться в нуль, и тогда вся дробь будет равна нулю, так как соответствующие слагаемые подынтегральной функции в выражении (12) обращаются в нуль. Итак, найдя для случая ν — нечетное значение интегралов $I_{m\nu}$, при подстановке нижнего предела ($\theta=0$) в виде формулы (14), следует вычеркнуть все дроби, у которых знаменатели делятся на 4, а также те, которые равны нулю, затем оставшиеся дроби удвоить. На основании этих соображений интеграл $I_{m \text{ неч.}}$ по формуле (9) напишется:

$$I_{m \text{ неч.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right]. \quad (16)$$

Найдя интегралы $I_{m \text{ чет.}}$ и $I_{m \text{ нечет.}}$ по формулам (15) и (16) и подставив их значения в (8), получим искомое значение интеграла I с требуемой степенью точности в зависимости от величины m .

Результат представится в виде:

$$I = \sum_0^m \xi_m I_m,$$

(где $m=0, 1, 2, 3, 4 \dots$)

$$C_{2k} = \frac{4}{\pi} \sum_0^m \xi_m I_m \quad (17)$$

Формула (17) для вычисления коэффициентов C_{2k} представляет собой быстро сходящийся степенной ряд. Параметр ξ является правильной дробью и, будучи возведен в положительную степень, быстро убывает, поэтому с достаточной для практики точностью можно ограничиться первыми шестью членами.

Нами вычислены и представлены в виде таблицы 2 и 3 коэффициенты a_{ij} (см. систему уравнений 15), являющиеся комбинациями C_{2k} в зависимости от параметра ξ .

Величины a_{ij} для промежуточных значений ξ достаточно точно вычисляются путем интерполяции.

Для этого крыла разберем также два случая изменения угла атаки по размаху.

Таблица 2

ξ a_{ij}	0,3	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
$a_{11} = \frac{1}{2}(C_0 - C_2)$	0,9632	0,9868	1,0110	1,0366	1,0654	0,1002	1,1384	1,1800	1,2222
$a_{13} - a_{31} = \frac{1}{2}(C_2 - C_4)$	— 0,1231	— 0,1119	— 0,0991	— 0,0839	— 0,0656	— 0,0446	— 0,0199	0,0088	0,0416
$a_{15} - a_{51} = \frac{1}{2}(C_4 - C_6)$	— 0,0617	— 0,0694	— 0,0770	— 0,0842	— 0,0928	— 0,1015	— 0,1111	— 0,1212	— 0,1300
$a_{17} - a_{71} = \frac{1}{2}(C_6 - C_8)$	— 0,0035	— 0,0035	— 0,0036	— 0,0038	— 0,0047	— 0,0063	— 0,0081	— 0,0105	— 0,0151
$a_{18} = \frac{1}{2}(C_0 - C_6)$	0,7784	0,8055	0,8349	0,8685	0,9070	0,9541	1,0074	1,0676	1,1338
$a_{35} - a_{53} = \frac{1}{2}(C_2 - C_8)$	— 0,1883	— 0,1841	— 0,1790	— 0,1720	— 0,1631	— 0,1524	— 0,1391	— 0,1229	— 0,1045
$a_{37} - a_{73} = \frac{1}{2}(C_4 - C_{10})$	— 0,0758	— 0,0842	— 0,0932	— 0,1030	— 0,1140	— 0,1261	— 0,1396	— 0,1546	— 0,1704
$a_{55} = \frac{1}{2}(C_0 - C_{10})$	0,7643	0,7909	0,8187	0,8497	0,8858	0,9295	0,9789	1,0342	1,0934
$a_{37} - a_{75} = \frac{1}{2}(C_2 - C_{12})$	— 0,1984	— 0,1953	— 0,1912	— 0,1853	— 0,1780	— 0,1691	— 0,1576	— 0,1440	— 0,1281
$a_{77} = \frac{1}{2}(C_0 - C_{14})$	0,7607	0,7868	0,8146	0,8454	0,8808	0,9249	0,9726	1,0268	1,0849

Таблица 3

ξ	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
a_{1j}									
$a_{22} = \frac{1}{2}(C_0 - C_4)$	0,8401	0,8749	0,9119	0,9527	0,9998	1,0556	1,1185	1,1888	1,2638
$a_{24} - a_{42} = \frac{1}{2}(C_2 - C_6)$	-0,1848	-0,1813	-0,1761	-0,1681	-0,1584	-0,1461	-0,1310	-0,1124	-0,0894
$a_{26} - a_{62} = \frac{1}{2}(C_4 - C_8)$	-0,0652	-0,0722	-0,0799	-0,0880	-0,0976	-0,0108	-0,1192	-0,1317	-0,1451
$a_{28} - a_{82} = \frac{1}{2}(C_6 - C_{10})$	-0,0141	-0,0148	-0,0162	-0,0186	-0,0212	-0,0246	-0,0285	-0,0334	-0,0404
$a_{44} = \frac{1}{2}(C_0 - C_8)$	0,7749	0,8027	0,8320	0,8672	0,9023	0,9478	0,9993	1,0571	1,1187
$a_{46} - a_{64} = \frac{1}{2}(C_2 - C_{10})$	-0,1989	-0,1961	-0,1923	-0,1868	-0,1796	-0,1707	-0,1595	-0,1458	-0,1298
$a_{48} - a_{84} = \frac{1}{2}(C_4 - C_{12})$	-0,0794	-0,0834	-0,0921	-0,1014	-0,1124	-0,1244	-0,1377	-0,1528	-0,1687
$a_{66} = \frac{1}{2}(C_0 - C_{12})$	0,7648	0,7915	0,8198	0,8513	0,8874	0,9319	0,9808	1,0360	1,0951
$a_{68} - a_{86} = \frac{1}{2}(C_2 - C_{14})$	-0,2025	-0,2000	-0,1964	-0,1912	-0,1846	-0,1763	-0,1658	-0,1532	-0,1383
$a_{88} = \frac{1}{2}(C_0 - C_{16})$	0,7616	0,7880	0,8170	0,8470	0,8827	0,9259	0,9748	1,0292	1,0873

1. Угол атаки, постоянный по размаху крыла

Коэффициенты B_n определяются по формуле (3)

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{при } n=1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Как и в случае прямоугольного крыла с постоянным углом атаки, коэффициенты A_n пропорциональны $\bar{\alpha}$, и формулы для определения коэффициентов подъемной силы и индуктивного сопротивления имеют тот же вид:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\alpha} A_1'$$

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2,$$

где величина $N = \frac{\Sigma n A_n^2}{A_1'^2}$ остается постоянной для всех углов атаки крыла.

Для определения коэффициента момента тангажа в формулу (18) гл. I подставим данные, соответствующие форме разбираемого крыла (см. фиг. 4):

$$b = \bar{b}(1 - \xi \cos \theta); C_{m_0} = \text{const} = C_{m_0} \cdot h = \frac{l}{2} \cos \theta \operatorname{tg} \varphi,$$

тогда

$$\begin{aligned} C_{m_z} = & \frac{l \bar{b}}{S} \bar{C}_{m_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \xi \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta + \bar{m} C_y + \\ & + \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_0 \operatorname{tg} \varphi \sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \sin n\theta d\theta \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \xi \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \theta d\theta = \\ &= 1 - \xi + \frac{\xi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \sin n\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n\theta d\theta = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)(n+2)}$$

Следовательно:

$$\sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \sin n\theta d\theta = \frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45}.$$

Подставляя в выражение (18), получим:

$$C_{m_z} = \frac{l \bar{b}}{S} \left[1 - \xi + \frac{\xi^2}{3} \right] \bar{C}_{m_0} + \bar{m} C_y + \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_0 \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} \right].$$

Представим это выражение в канонической форме по аналогии с коэффициентом момента профилей:

$$C_m = C_{m_0} + m C_y,$$

тогда

$$C_{mz} = \frac{l\bar{b}}{S} \left[1 - \xi + \frac{\xi^2}{3} \right] \bar{C}_{m0} + \left[\bar{m} + \frac{2}{\pi} \frac{l}{b} \operatorname{tg} \varphi R \right] C_y, \quad (19)$$

где

$$R = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{A_3}{A_1} - \frac{1}{21} \frac{A_5}{A_1} + \frac{1}{45} \frac{A_7}{A_1}.$$

2. Угол атаки, изменяющийся по гиперболическому закону по размаху крыла

На примере разбираемого крыла покажем, как косвенным путем, через геометрические параметры, можно определить закон изменения угла атаки по размаху.

Рассмотрим коническое крыло. В этом случае абсолютная толщина и хорда крыла изменяются по размаху по линейному закону.

$$e = \bar{e}(1 - \eta \cos \theta) \text{ и } b = \bar{b}(1 - \xi \cos \theta),$$

где

$$\eta = \frac{\bar{e} - e_e}{e} \text{ и } \xi = \frac{\bar{b} - b_e}{b}.$$

Следовательно, относительная толщина $\sigma = \frac{e}{b}$ изменяется по гиперболическому закону:

$$\sigma = \frac{\bar{e}(1 - \eta \cos \theta)}{\bar{b}(1 - \xi \cos \theta)} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma} \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta}.$$

Но для конических крыльев изменение относительной вогнутости пропорционально изменению относительной толщины.

$$\frac{\delta}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma},$$

откуда относительная вогнутость и, следовательно, угол атаки изменяются у такого крыла по гиперболическому закону.

В частном случае, когда $\eta = \xi$, т. е. абсолютная толщина изменяется пропорционально хорде, относительная толщина не изменяется, и мы имеем трапецевидное крыло с постоянным углом атаки (предыдущий случай).

Аналитическое выражение для угла атаки, изменяющегося по гиперболическому закону, имеет следующий вид:

$$\alpha = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \left(1 - \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta} \right) = \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta - \xi) \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta}.$$

Разложение (10) гл. I напишется:

$$\left[\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta - \xi) \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta} \right] \sin \theta = \sum B_n \sin n\theta$$

и коэффициенты B_n соответственно равны:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta - \xi) \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta} \right] \sin \theta \sin n\theta d\theta = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\bar{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin n\theta d\theta - \frac{\bar{\alpha}_0}{2} (\eta - \xi) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1 - \xi \cos \theta} \sin n\theta d\theta, \right. \end{aligned}$$

где n — принимает только нечетные значения.

Вычислим интегралы:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1 - \xi \cos \theta} \sin n\theta d\theta.$$

Разложим знаменателя в ряд:

$$\frac{1}{1 - \xi \cos \theta} = 1 + \xi \cos \theta + \xi^2 \cos^2 \theta + \xi^3 \cos^3 \theta + \dots$$

Подставим в предыдущее выражение, получим:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n\theta d\theta + \xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin 2\theta \sin n\theta d\theta + \\ + \xi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin 2\theta \sin n\theta d\theta + \dots = \sum \xi^m I_m, \quad (20)$$

где

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad (21)$$

но при m — нечетном

$$\cos^m \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=1}^m \binom{m}{\frac{m}{2}} \cos \nu\theta,$$

где ν — принимает только нечетные значения
и m — четном

$$\cos^m \theta = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=2}^m \binom{m}{\frac{m}{2}-\nu} \cos \nu\theta + \binom{m}{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^m},$$

где ν — принимает только нечетные значения.

Подставляя в выражение (21), получим:

$$I_{m \text{ неч.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=1}^m \binom{m}{\frac{m}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \nu\theta \sin n\theta d\theta \quad (22)$$

$$I_{m \text{ четн.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=2}^m \binom{m}{\frac{m}{2}-\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \nu\theta \sin n\theta d\theta + \\ + \frac{1}{2^m} \binom{m}{\frac{m}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n\theta d\theta. \quad (23)$$

Рассмотрим интеграл общий обоим выражениям:

$$I_{m\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \nu\theta \sin n\theta d\theta. \quad (24)$$

Разложим подынтегральную функцию:

$$\sin n\theta \cos \nu\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} [\sin (n + \nu)\theta + \sin (n - \nu)\theta] \sin 2\theta = \\ = \frac{1}{4} [\cos (n + \nu - 2)\theta - \cos (n + \nu + 2)\theta + \cos (n - \nu - 2)\theta - \cos (n - \nu + 2)\theta].$$

Подставляя в (24) и проинтегрировав его, получим:

$$I_{mv} = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin p'\theta}{p'} - \frac{\sin q'\theta}{q'} + \frac{\sin r'\theta}{r'} - \frac{\sin s'\theta}{s'} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{где } p' &= n + v - 2 \\ q' &= n + v + 2 \\ r' &= n - v - 2 \\ d' &= n - v + 2. \end{aligned}$$

Рассмотрим в отдельности выражение (25) при v — нечетном и v — четном.

v — нечетное.

При подстановке как верхнего, так и нижнего пределов, выражение (25) обращается в нуль. Исключение представляет тот случай, когда один из знаменателей обращается в нуль, но тогда соответствующее слагаемое подынтегральной функции в выражении (24) обращается в единицу. После интегрирования и подстановки пределов интеграл равен $\frac{\pi}{8}$.

Из рассмотрения знаменателей дробей выражения (25) следует, что один из знаменателей обращается в нуль, когда значения величин n и v отличаются на два.

На основании этих соображений:

$$I_{m \text{ четн.}} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{v=1}^m \left(\frac{m}{2}\right) \frac{\pi}{8} & \text{при } n = v \pm 2 \\ 0 \dots \dots \dots & \text{при } n \neq v \pm 2 \end{cases}$$

v — четное.

Знаменатели дробей выражения (25) становятся нечетными и при подстановке пределов получаем в числителях $+1$ или -1 .

Следовательно:

$$I_{mv} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} \left[\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} - \frac{1}{s'} \right].$$

Чтобы покончить с $I_{m \text{ четн.}}$, рассмотрим, что дает второй интеграл формулы (23):

$$I_{m \frac{m}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n\theta d\theta.$$

Последний получается при подстановке в выражении (25) $v=0$

$$I_{m \frac{m}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \sin n\theta d\theta = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2} \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right].$$

Для $I_{m \text{ четн.}}$ окончательно получим:

$$I_{m \text{ четн.}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \left\{ \sum_{v=2}^m \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} - \frac{1}{s'} \right] + \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right] \right\}$$

Подставляя $I_{m \text{ неч.}}$ и $I_{m \text{ четн.}}$ в формулу (21), получим значение интеграла

$$I = \sum_0^m \xi^m I_m,$$

(где $m=0, 1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots$)

Значение интеграла I с достаточной для практики точностью можно получить, ограничившись первыми шестью-семью членами ряда.

Искомые значения коэффициентов B_n будут:

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} - k_n' \bar{\alpha}_0 & \text{при } n = 1 \\ -k_n' \bar{\alpha}_0 & \text{при } n \neq 1, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$k_n' = \frac{2}{\pi} (\eta - \xi) \sum_0^m \xi^m I_m.$$

Нами вычислены значения $\frac{k_n'}{\eta - \xi}$ в зависимости от параметра ξ для первых четырех коэффициентов B_n . Результаты представлены в таблицах 16—19 и на фиг. 15—18.

Как в случае прямоугольного закрученного крыла, коэффициенты A_n разлагаются на сумму двух членов, один из которых пропорционален $\bar{\alpha}$, а второй $\bar{\alpha}_0$.

$$A_n = A_n' \bar{\alpha} - A_n'' \bar{\alpha}_0.$$

Коэффициент подъемной силы будет:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\mu} (A_1' \bar{\alpha} - A_1'' \bar{\alpha}_0).$$

Коэффициент индуктивного сопротивления равен:

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2,$$

но величина $N = \sum \frac{n A_n^2}{A_1^2}$ меняется вместе с углом атаки.

Коэффициент момента тангажа получим, положив в формуле (18) гл. I (см. фиг. 4).

$$b = \bar{b} (1 - \xi \cos \theta); C_{m_0} = \overline{C_{m_0}} \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta}; h = \frac{l}{2} \cos \theta \operatorname{tg} \varphi,$$

тогда

$$\begin{aligned} C_{m_z} = & \frac{i \bar{b}}{S} \overline{C_{m_0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta} (1 - \xi \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta + \overline{m} C_y + \\ & + \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_0 \operatorname{tg} \varphi \sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \sin n\theta d\theta \end{aligned} \quad (27)$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta \cos \theta}{1 - \xi \cos \theta} (1 - \xi \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \cos \theta) (1 - \xi \cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \frac{\eta + \xi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \frac{\eta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \cos \theta d\theta = 1 - \frac{\eta + \xi}{2} + \frac{\eta \xi}{3} \end{aligned}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \sin n\theta d\theta = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)(n+2)};$$

следовательно:

$$\sum A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \sin n \theta d\theta = \left[\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} \right]$$

Подставляя в (27), будем иметь:

$$C_{m_z} = \frac{\bar{l}\bar{b}}{S} \left[1 - \frac{\eta + \xi}{2} + \frac{\xi \cdot \eta}{3} \right] \overline{Cm}_0 + \overline{m} C_y + \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_0 \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{A_1}{3} + \frac{A_3}{5} - \frac{A_5}{21} + \frac{A_7}{45} \right] =$$

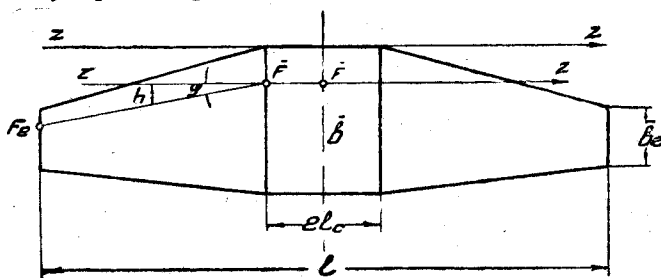
$$= \frac{\bar{l}\bar{b}}{S} \left[1 - \frac{\xi + \eta}{2} + \frac{\xi \eta}{3} \right] \overline{Cm}_0 + \left[\overline{m} + \frac{2}{\pi} \frac{l}{b} \operatorname{tg} \varphi R \right] C_y, \quad (28)$$

где

$$R = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{A_3}{A_1} - \frac{1}{21} \frac{A_5}{A_1} + \frac{1}{45} \frac{A_7}{A_1}.$$

Трапецевидное крыло с прямоугольным центропланом

Если длину центроплана обозначить через $2l_c$, то закон изменения хорды по размаху крыла представится в таком виде (см. фиг. 5):



Фиг. 5.

$$b = \bar{b} \left[1 + \xi \frac{2}{l} (z - l_c) \right] \quad \text{при } -\frac{l}{2} \leq z \leq -l_c$$

$$= \bar{b} \quad \text{при } -l_c \leq z \leq l_c$$

$$= \bar{b} \left[1 - \xi \frac{2}{l} (z - l_c) \right] \quad \text{при } l_c \leq z \leq \frac{l}{2},$$

или

$$b = \bar{b} \left[1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c) \right] \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_c$$

$$= \bar{b} \quad \text{при } \theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c$$

$$= \bar{b} \left[1 + \xi (\cos \theta - \cos \theta_c) \right] \quad \text{при } \pi - \theta_c \leq \theta \leq \pi,$$

где через θ_c обозначен угол, соответствующий половине длины центроплана и величина которого определяется из уравнения:

$$-\cos \theta_c = \frac{2l_c}{l}.$$

Коэффициенты C_{2k} будут соответственно равны:

$$C_{2k} = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_c} \frac{\sin \theta}{a - \varepsilon \cos \theta} \cos 2k\theta d\theta + \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos 2k\theta d\theta \right], \quad (29)$$

где

$$a = 1 + \xi \cos \theta_c.$$

Повторяя рассуждения, которые приведены при вычислении интеграла (7), и придерживаясь тех же обозначений, первый интеграл формулы (29) может быть представлен:

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^{\theta_c} \frac{\sin \theta}{a - \xi \cos \theta} \cos 2k\theta d\theta = \frac{1}{a} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2k\theta d\theta + \\ & + \frac{\xi}{a^2} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \theta \cos 2k\theta d\theta = \frac{\xi^2}{a^3} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2k\theta d\theta + \\ & + \dots + \frac{\xi^m}{a^{m+1}} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^m \theta \cos 2k\theta d\theta + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначим интеграл:

$$\int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^m \theta \cos 2k\theta d\theta = I_m.$$

Заменив $\cos^m \theta$ через известные формулы, получим:

$$I_{\text{неч.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{v=1}^m \binom{m}{2} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^v \theta \cos 2k\theta d\theta \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I_{\text{четн.}} = & \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{v=2}^m \binom{m}{2} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^v \theta \cos 2k\theta d\theta + \\ & + \left(\frac{1}{2}\right)^m \binom{m}{2} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos 2k\theta d\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Вычислим интеграл, общий обеим формулам:

$$I_{mv} = \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos^v \theta \cos 2k\theta d\theta.$$

Преобразовав предварительно подынтегральное выражение в виде суммы и проинтегрировав его, будем иметь:

$$I_{mv} = \frac{1}{4} \left[\frac{\cos p\theta}{p} - \frac{\cos q\theta}{q} - \frac{\cos r\theta}{r} + \frac{\cos s\theta}{s} \right]_0^{\theta_c},$$

или после подстановки пределов:

$$I_{mv} = \frac{1}{4} \left[\frac{1 - \cos p\theta}{p} - \frac{1 - \cos q\theta}{q} - \frac{1 - \cos r\theta}{r} + \frac{1 - \cos s\theta}{s} \right].$$

Второй интеграл формулы (32)

$$I_{m \frac{m}{2}} = \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos 2k\theta d\theta$$

после интеграции и подстановки пределов примет следующий вид:

$$I_{m \frac{m}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \cos (2k+1)\theta_c}{2k+1} - \frac{1 - \cos (2k-1)\theta_c}{2k-1} \right].$$

Теперь формулы (31) и (32) могут быть представлены:

$$I_{m \text{ неч.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{v=2}^m \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1 - \cos p \theta}{p} - \frac{1 - \cos q \theta}{q} - \frac{1 - \cos r \theta}{r} + \frac{1 - \cos s \theta}{s} \right]$$

$$I_{m \text{ четн.}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \left\{ \sum_{v=2}^m \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1 - \cos p \theta}{p} - \frac{1 - \cos q \theta}{q} - \frac{1 - \cos r \theta}{r} + \frac{1 - \cos s \theta}{s} \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{1 - \cos (2k+1) \theta_c}{2k+1} - \frac{1 - \cos (2k-1) \theta_c}{2k-1} \right] \right\}. \quad (33)$$

Подставляя значения $I_{m \text{ неч.}}$ и $I_{m \text{ четн.}}$ в (30), получим величину интеграла I_1

$$I_1 = \sum_0^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} I_m,$$

где с достаточной для практики точностью можно ограничиться первыми шестью — семью членами ряда.

Наконец определим, чему равен второй интеграл формулы (29):

$$I_2 = \int_{\theta_c}^{\pi/2} \sin \theta \cos 2k \theta d \theta.$$

После интегрирования получим:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos (2k+1) \theta_c}{2k+1} - \frac{\cos (2k-1) \theta_c}{2k-1} \right]. \quad (34)$$

Таблица 4

$\frac{1}{2} C_0$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	0,7569	0,7315	0,7097	0,6907	0,6758
0,4	0,8128	0,7738	0,4410	0,7131	0,6914
0,5	0,8813	0,8222	0,7772	0,7430	0,7085
0,6	0,9674	0,8847	0,8205	0,7662	0,7273
0,7	1,0771	0,9586	0,8688	0,8002	0,7480

Таблица 5

$\frac{1}{2} C_2$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	— 0,2063	— 0,2017	— 0,1990	— 0,1982	— 0,1989
0,4	— 0,1999	— 0,1946	— 0,1920	— 0,1913	— 0,1932
0,5	— 0,1891	— 0,1846	— 0,1828	— 0,1837	— 0,1866
0,6	— 0,1719	— 0,1705	— 0,1711	— 0,1742	— 0,1791
0,7	— 0,1453	— 0,1543	— 0,1561	— 0,1629	— 0,1706

Таблица 6

$\frac{1}{2} C_4$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	—0,0831	—0,0783	—0,0722	—0,0658	—0,0582
0,4	—0,1020	—0,0939	—0,0842	—0,0751	—0,0640
0,5	—0,1248	—0,1114	—0,0979	—0,0845	—0,0701
0,6	—0,1510	—0,1340	—0,1160	—0,0960	—0,0766
0,7	—0,1868	—0,1570	—0,1299	—0,1077	—0,0834

Таблица 7

$\frac{1}{2} C_6$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	—0,0214	—0,0215	—0,0232	—0,0252	—0,0268
0,4	—0,0251	—0,0246	—0,0267	—0,0289	—0,0304
0,5	—0,0325	—0,0296	—0,0317	—0,0333	—0,0346
0,6	—0,0432	—0,0370	—0,0385	—0,0388	—0,0394
0,7	—0,0558	—0,0477	—0,0478	—0,0482	—0,0048

Таблица 8

$\frac{1}{2} C_8$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	—0,0179	—0,0162	—0,0134	—0,0108	—0,0099
0,4	—0,0216	—0,0190	—0,0150	—0,0114	—0,0101
0,5	—0,0264	—0,0224	—0,0171	—0,0123	—0,0105
0,6	—0,0339	—0,0268	—0,0199	—0,0135	—0,0112
0,7	—0,0417	—0,0327	—0,0232	—0,0152	—0,0122

Таблица 9

$\frac{1}{2} C_{10}$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	—0,0073	—0,0079	—0,0094	—0,0096	—0,0089
0,4	—0,0083	—0,0090	—0,0108	—0,0107	—0,0099
0,5	—0,0098	—0,0104	—0,0124	—0,0117	—0,0110
0,6	—0,0123	—0,0125	—0,0144	—0,0132	—0,0122
0,7	—0,0164	—0,0154	—0,0170	—0,0139	—0,0135

Таблица 10

$\frac{1}{2} C_{12}$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	-0,0078	-0,0066	-0,0049	-0,0046	-0,0056
0,4	-0,0094	-0,0077	-0,0053	-0,0048	-0,0062
0,5	-0,0115	-0,0089	-0,0058	-0,0051	-0,0068
0,6	-0,0145	-0,0105	-0,0066	-0,0056	-0,0075
0,7	-0,0182	-0,0127	-0,0077	-0,0063	-0,0084

Таблица 11

$\frac{1}{2} C_{14}$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	-0,0048	-0,0044	-0,0052	-0,0046	-0,0034
0,4	-0,0056	-0,0050	-0,0061	-0,0051	-0,0034
0,5	-0,0068	-0,0058	-0,0070	-0,0057	-0,0035
0,6	-0,0084	-0,0069	-0,0081	-0,0084	-0,0035
0,7	-0,0104	-0,0084	-0,0095	-0,0079	-0,0036

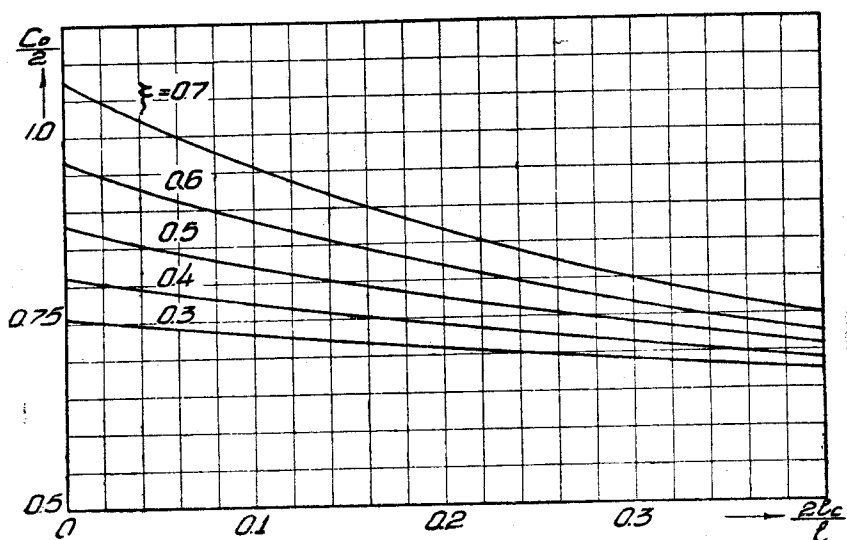
Таблица 12

$\frac{1}{2} C_{16}$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	-0,0045	-0,0034	-0,0027	-0,0033	-0,0037
0,4	-0,0056	-0,0039	-0,0029	-0,0036	-0,0041
0,5	-0,0068	-0,0045	-0,0032	-0,0040	-0,0046
0,6	-0,0084	-0,0053	-0,0037	-0,0045	-0,0051
0,7	-0,0104	-0,0058	-0,0043	-0,0051	-0,0057

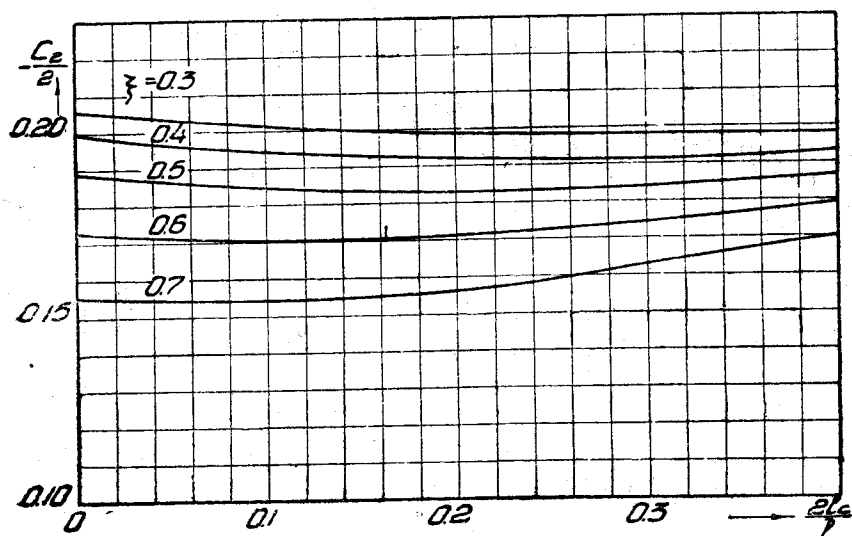
Подставив полученные значения интегралов I_1 и I_2 по формулам (33), (34) в выражение (29) будем иметь:

$$C_{2k} = \frac{4}{\pi} \left[\sum_{c=1}^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} I_m + I_2 \right] \quad (36)$$

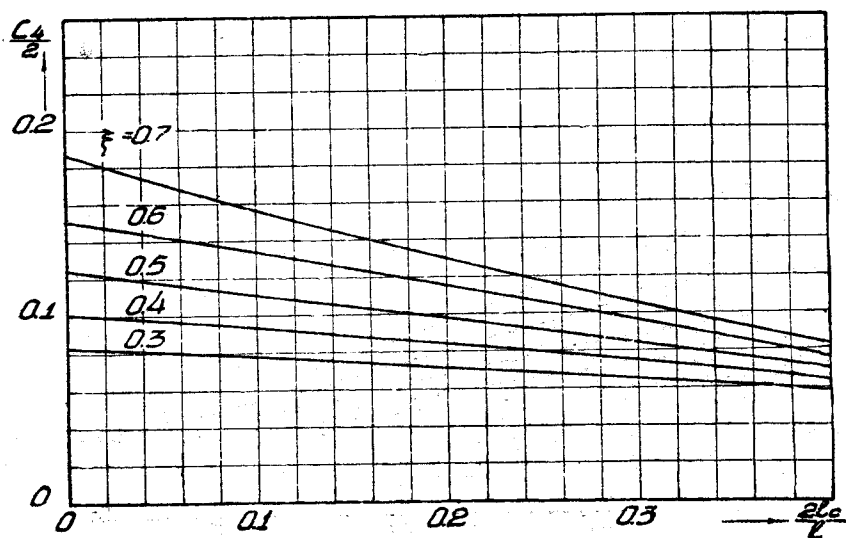
Коэффициенты C_{2k} в данном случае зависят от двух параметров: величины сужения ξ и длины центроплана. Нами вычислены величины C_{2k} в зависимости от отношения $\frac{2l_c}{l}$ при различных значениях параметра ξ . Результаты представлены в таблице 4 — 12 и на фиг. 6 — 14.



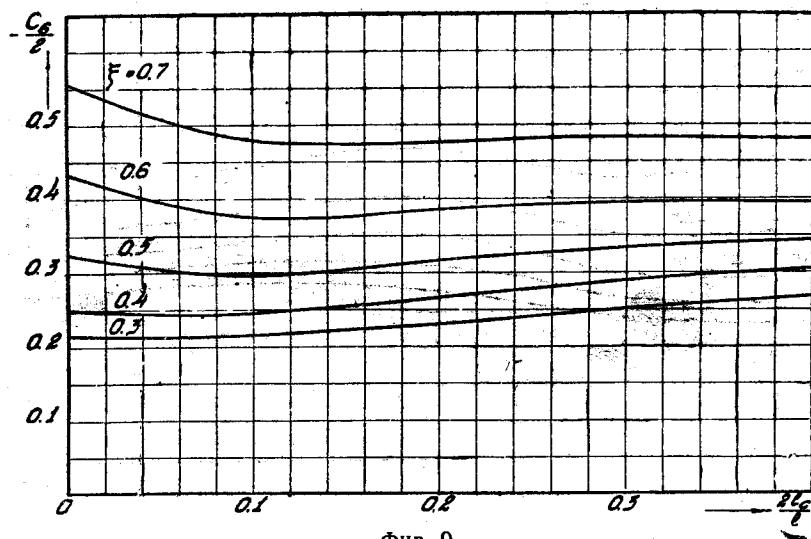
Фиг. 6.



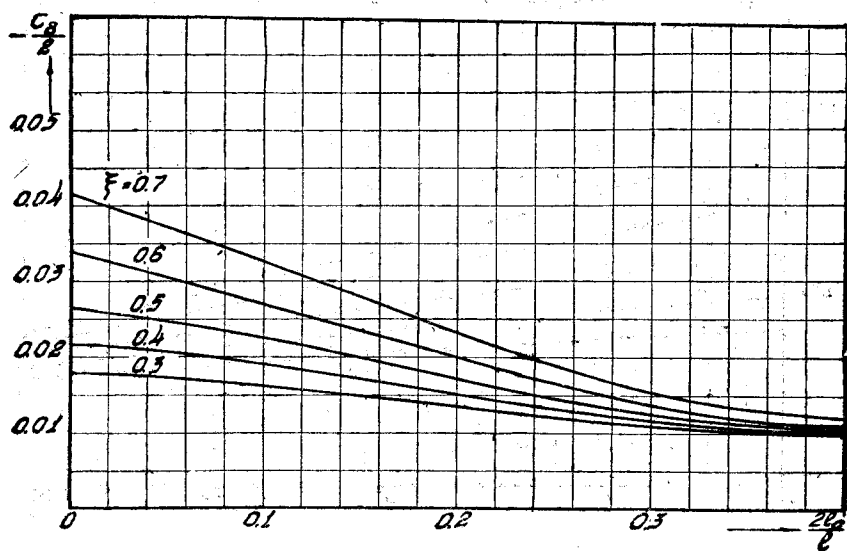
Фиг. 7.



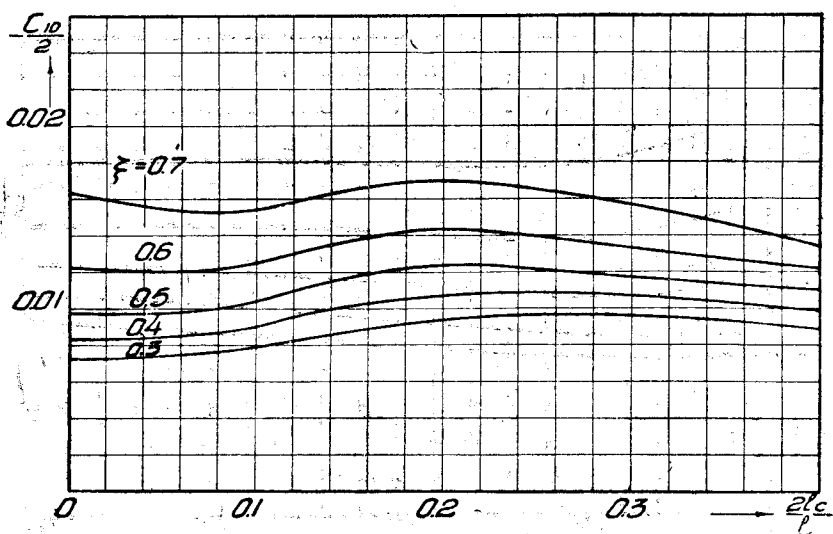
Фиг. 8.



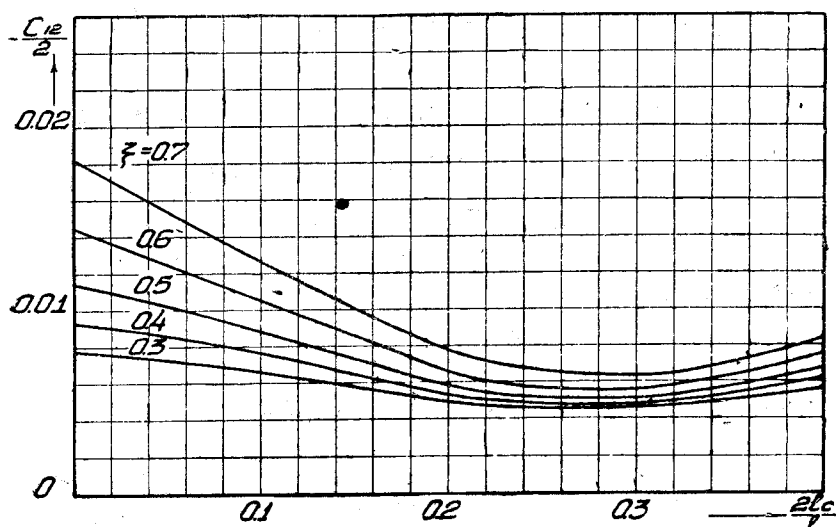
Фиг. 9.



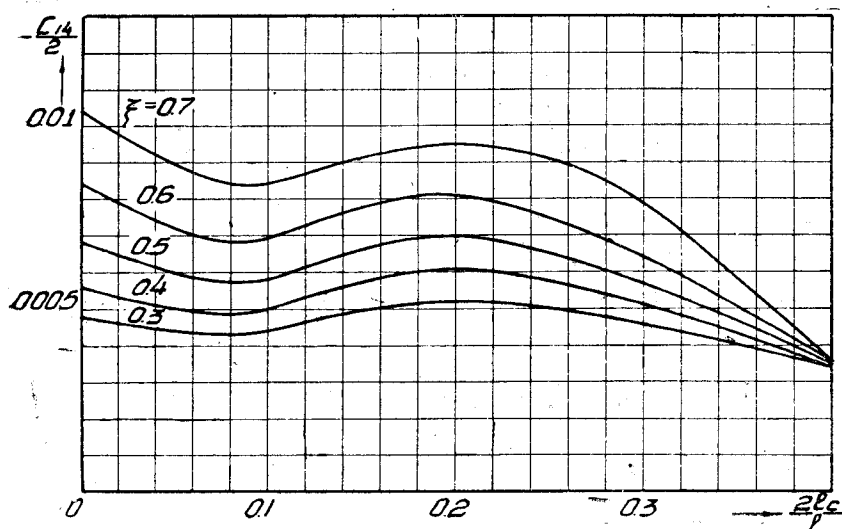
Фиг. 10.



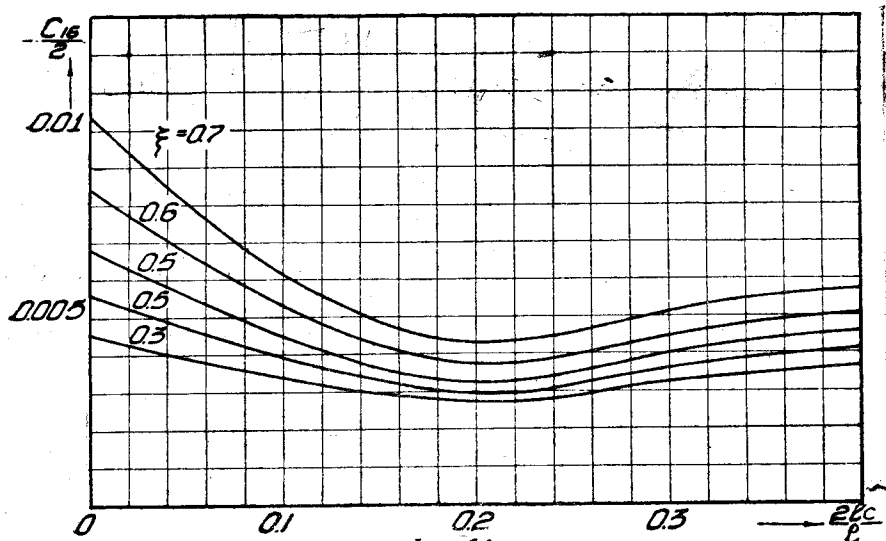
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

Рассмотрим два способа изменения угла атаки, характерные для данной формы крыла.

1. Угол атаки, постоянный по размаху крыла

Коэффициенты B_n определяются по формуле (3)

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

Коэффициент подъемной силы будет:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\alpha} A_1 \bar{\alpha}$$

Коэффициент индуктивного сопротивления:

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2,$$

где N остается постоянным для всех углов атаки крыла. Коэффициент момента тангажа этого крыла получим, если в формулу (18) гл. I положим (см. фиг. 5):

$$\left. \begin{aligned} b &= \bar{b} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)] \\ C_{m_0} &= C_{m_0}^- \\ h &= \frac{l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_c) \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{для} \\ & 0 \leq \theta \leq \theta_c \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} b &= \bar{b} \\ C_{m_0} &= C_{m_0}^- \\ h &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{для} \\ & \theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} C_{mz} &= \frac{\bar{b}}{S} C_{m_0}^- \cdot \left\{ \int_0^{\theta_c} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)]^2 \sin \theta d\theta + \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right\} + \\ &+ \bar{m} C_y + \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_0 \operatorname{tg} \varphi \sum A_n \int_0^{\theta_c} \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin n\theta d\theta. \end{aligned} \quad (37)$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\theta_c} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)]^2 \sin \theta d\theta + \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - \xi \left[\int_0^{\theta_c} \sin 2\theta d\theta - 2 \cos \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta \right] + \\ &+ \xi^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\theta_c} \sin 2\theta \cos \theta d\theta - \cos \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin 2\theta d\theta + \cos^2 \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta \right] = \\ &= 1 - \xi \left[\frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} - 2 \cos \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right] + \\ &+ \xi^2 \left[\frac{1}{4} (1 - \cos \theta_c + \frac{1 - \cos 3\theta_c}{3}) - \cos \theta_c \frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} + \cos^2 \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right] = \\ &= 1 - D\xi + E\xi^2, \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} - 2 \cos \theta_c (1 - \cos \theta_c)$$

$$\text{и } E = \left[\frac{1}{4} \left(1 - \cos \theta_c + \frac{1 - \cos 3 \theta_c}{3} \right) - \cos \theta_c \frac{1 - \cos 2 \theta_c}{2} + \cos^2 \theta (1 - \cos \theta_c) \right]$$

$$I_2 = \int_0^{\theta_c} \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin n \theta d \theta = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_c} \sin 2 \theta \sin n \theta d \theta -$$

$$\cos \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin \theta \sin n \theta d \theta = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin (n-2) \theta_c}{n-2} - \frac{\sin (n+2) \theta_c}{n+2} \right] -$$

$$- \begin{cases} \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} \right] & \text{при } n = 1 \\ \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\frac{\sin (n-1) \theta_c}{n-1} - \frac{\sin (n+1) \theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно

$$\sum A_n \int_0^{\theta_c} \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin n \theta d \theta = \sum F_n A_n,$$

где

$$F_n = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin (n-2) \theta_c}{n-2} - \frac{\sin (n+2) \theta_c}{n+2} \right] - \begin{cases} \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} \right] & \text{при } n = 1 \\ \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\frac{\sin (n-1) \theta_c}{n-1} - \frac{\sin (n+1) \theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

Подставляя в (37), получим:

$$\begin{aligned} C_{mz} &= \frac{l \bar{b}}{S} \left[1 - D \xi + E \xi^2 \right] \overline{C_{m0}} - \overline{m} C_y + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} a_3 \operatorname{tg} \varphi [F_1 A_1 + F_3 A_3 + F_5 A_5 + F_7 A_7] = \\ &= -\frac{\bar{l} \bar{b}}{S} [1 - D \xi + E \xi^2] \overline{C_{m0}} + [\overline{m} + \frac{2}{\pi} \frac{l}{\bar{b}} \operatorname{tg} \varphi R] C_y, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$R' = F_1 + F_3 A_3 + F_5 A_5 + F_7 A_7.$$

Численные значения величин D , E и F_n в зависимости от отношения $\frac{2l_c}{l}$ представлены в табл. 13, 14, 15.

Таблица 13

$\frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
D	1,0000	0,8100	0,6400	0,4901	0,3604

Таблица 14

$\frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
E	0,3333	0,3240	0,2987	0,2563	0,2159

Таблица 15

$\frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
F_1	0,3333	0,2598	0,1972	0,1424	0,0981
F_3	0,2000	0,1950	0,1806	0,1580	0,1294
F_5	-0,0476	-0,0427	-0,0293	-0,0105	0,0086
F_7	0,0222	0,0174	0,0053	-0,0083	-0,0169

2. Угол атаки, постоянный по центроплану и изменяющийся по гиперболическому закону по трапецевидной части крыла

Аналитически такое изменение угла атаки может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha &= \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta - \xi)(\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 - \xi(\cos \theta - \cos \theta_c)} \quad \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_c \\ &= \bar{\alpha} \dots \dots \dots \quad \text{для } \theta_c \leq \theta \leq \pi - \theta_c \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta + \xi)(\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 + \xi(\cos \theta - \cos \theta_c)} \quad \text{для } \theta_c \leq \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

Формула для вычисления коэффициентов B_n имеет вид:

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_c} \bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 \frac{(\eta - \xi)(\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 - \xi(\cos \theta - \cos \theta_c)} \sin \theta \sin n \theta d\theta + \bar{\alpha} \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin n \theta d\theta \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\bar{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin n \theta d\theta - \bar{\alpha}_0 (\eta - \xi) \int_0^{\theta_c} \frac{\cos \theta - \cos \theta_c}{1 - \xi(\cos \theta - \cos \theta_c)} \sin \theta \sin n \theta d\theta \right], \quad (39)\end{aligned}$$

где n — принимает только нечетные значения.

Первый интеграл выражения (39) мы неоднократно вычисляли, он равен:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } n=1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

Величину второго интеграла найдем, предварительно преобразовав его следующим образом:

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^{\theta_c} \frac{\cos \theta - \cos \theta_c}{1 - \xi(\cos \theta - \cos \theta_c)} \sin \theta \sin n \theta d\theta = -\frac{1}{\xi} \int_0^{\theta_c} \sin \theta \sin n \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{\xi} \int_0^{\theta_c} \frac{\sin \theta}{a - \xi \cos \theta} \sin n \theta d\theta, \quad \text{где } a = 1 + \xi \cos \theta_c.\end{aligned}$$

Вычислим интегралы:

$$I_2' = \int_0^{\theta_c} \sin \theta \sin n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\theta_c - \frac{\sin 2\theta_c}{2} \right] & \text{при } n=1 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-1)\theta_c}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

$$I_2'' = \int_0^{\theta_c} \frac{\sin \theta}{a - \xi \cos \theta} \sin n \theta d\theta.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при вычислении интеграла (20), и оставляя те же обозначения, получим:

$$I_2''' = \int_0^{\theta_c} \frac{\sin \theta}{a - \xi \cos \theta} \sin n \theta d\theta = \sum_{m=0}^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} \cdot I_m, \quad (40)$$

где

$$I_{m_{\text{неч.}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=1}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \nu \theta \sin n \theta d\theta$$

и

$$I_{m_{\text{четн.}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \sum_{\nu=2}^m \left(\frac{m-\nu}{2}\right) \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \nu \theta \sin n \theta d\theta + \frac{1}{2^m} \left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\theta_c} \sin \theta \sin n \theta d\theta$$

Рассмотрим интеграл, общий обоим выражениям:

$$I_{m_{\nu}} = \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \nu \theta \sin n \theta d\theta \quad (41)$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin \theta \cos \nu \theta \sin n \theta = \frac{1}{4} [\cos(n+\nu-1)\theta - \cos(n+\nu+1)\theta + \cos(n-\nu-1)\theta - \cos(n-\nu+1)\theta].$$

Подставляя в выражение (41) и проинтегрировав его, будем иметь:

$$I_{m_{\nu}} = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin p'' \theta_c}{p''} - \frac{\sin q'' \theta_c}{q''} + \frac{\sin r'' \theta_c}{r''} - \frac{\sin s'' \theta_c}{s''} \right],$$

где

$$\begin{aligned} p'' &= n + \nu - 1 \\ q'' &= n + \nu + 1 \\ r'' &= n - \nu - 1 \\ s'' &= n - \nu + 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при ν четном, когда значения величин n и ν отличаются на единицу, один из знаменателей обращается в нуль, но тогда вся дробь обращается в θ_c , так как соответствующее слагаемое подынтегральной функции выражения (41) обращается в единицу.

Таким образом, I_m четные и нечетные примут следующий вид:

$$I_{m_{\text{неч.}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{v=1}^m \left(\frac{m-v}{2}\right) \left[\frac{\sin p'' \theta_c}{p''} - \frac{\sin q'' \theta_c}{q''} + \frac{\sin r'' \theta_c}{r''} - \frac{\sin s'' \theta_c}{s''} \right]$$

и

$$I_{m_{\text{четн.}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{v=2}^m \left(\frac{m-v}{2}\right) \left[\frac{\sin p'' \theta_c}{p''} - \frac{\sin q'' \theta_c}{q''} + \frac{\sin r'' \theta_c}{r''} - \frac{\sin s'' \theta_c}{s''} \right] +$$

$$+ \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \left(\frac{m}{2}\right) \left[\theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} \right] & \text{при } n=1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \left(\frac{m}{2}\right) \left[\frac{\sin (n-1) \theta_c}{n-1} - \frac{\sin (n+1) \theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

Подставляя значения $I_{m_{\text{неч.}}}$ и $I_{m_{\text{четн.}}}$ в выражение (40), получим:

$$I_2'' = \sum_0^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} I_m$$

(где $m=0, 1, 2, 3, 4 \dots$)

Для получения численных значений величины I_2'' с достаточной для практики точностью можно ограничиться первыми шестью-семью членами ряда.

Теперь легко определить I_2 .

$$I_2 = \sum_0^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} I_m = \begin{cases} \frac{1}{2\xi} \left[\theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} \right] & \text{при } n=1 \\ \frac{1}{2\xi} \left[\frac{\sin (n-1) \theta_c}{n-1} - \frac{\sin (n+1) \theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1 \end{cases}$$

Коэффициенты B_n соответственно равны:

$$B_n = \frac{1}{\xi} \begin{cases} \bar{\alpha} - K_n'' \bar{\alpha}_0 & \text{при } n=1 \\ -K_n'' \bar{\alpha}_0 & \text{при } n \neq 1 \end{cases} \quad (42)$$

где

$$K_n' = \frac{4}{\pi} \frac{\eta - \xi}{\xi} \left[\sum_0^m \frac{\xi^m}{a^{m+1}} I_m - \frac{1}{2} \begin{cases} \theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} & \text{при } n=1 \\ \frac{\sin \theta (n-1) \theta_c}{n-1} - \frac{\sin (n+1) \theta_c}{n+1} & \text{при } n \neq 1 \end{cases} \right]$$

Нами вычислены величины $\frac{K_n'}{\eta - \xi}$ в зависимости от отношения $\frac{2l_c}{l}$ при различных значениях параметра ξ . Результаты представлены в таблицах 16—19 и на фиг. 15—18. Как в случае других аэродинамически закрученных крыльев, каждый коэффициент A_n распадается на сумму двух членов, один из которых пропорционален $\bar{\alpha}$, а другой $\bar{\alpha}_0$.

$$A_n = A_n' \bar{\alpha} - A_n'' \bar{\alpha}_0.$$

Коэффициент подъемной силы будет:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} (A_1' \bar{\alpha} - A_1'' \bar{\alpha}_0).$$

Коэффициент индуктивного сопротивления останется тот же:

$$C_i = \frac{2S}{\pi l^2} N C_y^2.$$

Но коэффициент N меняется с углом атаки крыла.

Таблица 16

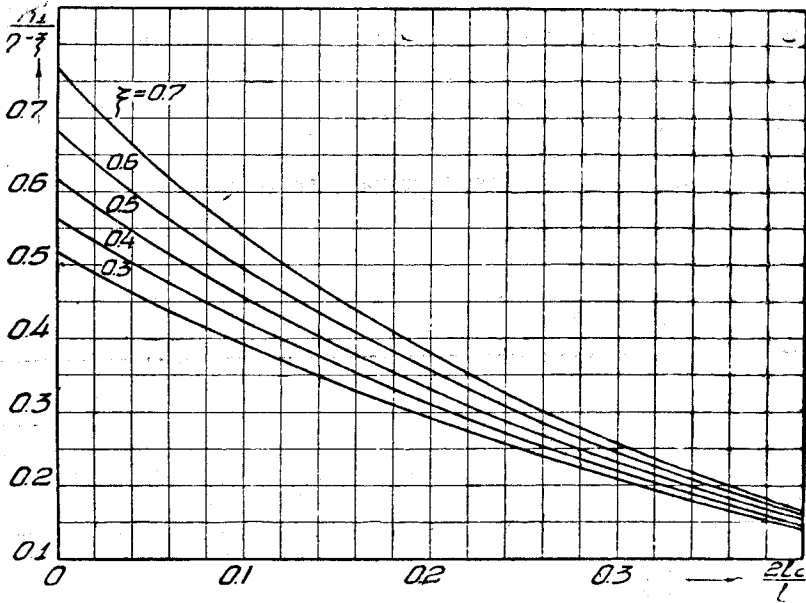
$K_1' / \eta - \xi$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	0,5191	0,3904	0,2917	0,2072	0,1398
0,4	0,5630	0,4233	0,3099	0,2178	0,1456
0,5	0,6170	0,4565	0,3299	0,2303	0,1545
0,6	0,6843	0,4948	0,3555	0,2426	0,1587
0,7	0,7697	0,5391	0,3796	0,2569	0,1660

Таблица 17

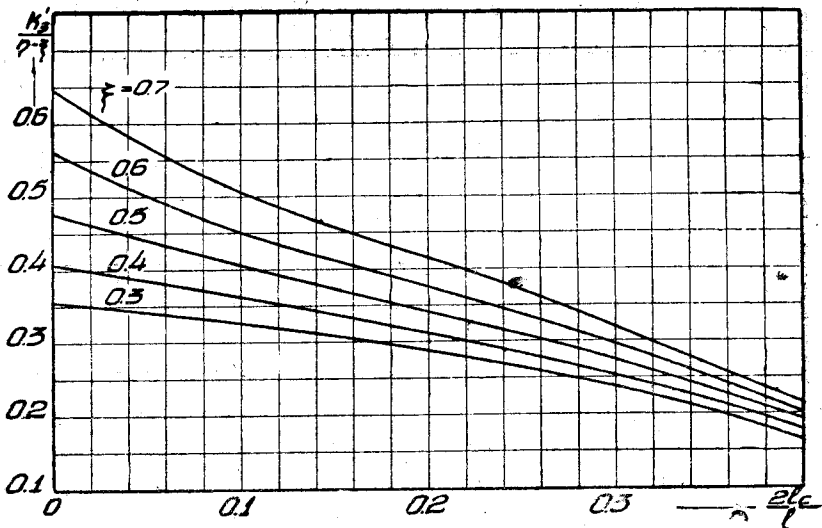
$K_3' / \eta - \xi$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	0,3561	0,3256	0,2864	0,2400	0,1640
0,4	0,4077	0,3617	0,3115	0,2565	0,1602
0,5	0,4768	0,4053	0,3410	0,2751	0,1568
0,6	0,5618	0,4508	0,3769	0,2959	0,1538
0,7	0,6823	0,5089	0,4153	0,3791	0,1537

Таблица 18

$K_5' / \eta - \xi$					
$\xi \backslash \frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	— 0,0544	— 0,0458	— 0,0268	— 0,0025	0,0209
0,4	— 0,0472	— 0,0394	— 0,0207	0,0018	0,0248
0,5	— 0,0342	— 0,0302	— 0,0137	0,0094	0,0302
0,6	— 0,0135	— 0,0177	— 0,0026	0,0171	0,0358
0,7	— 0,0223	— 0,0013	0,0108	0,0262	0,0419



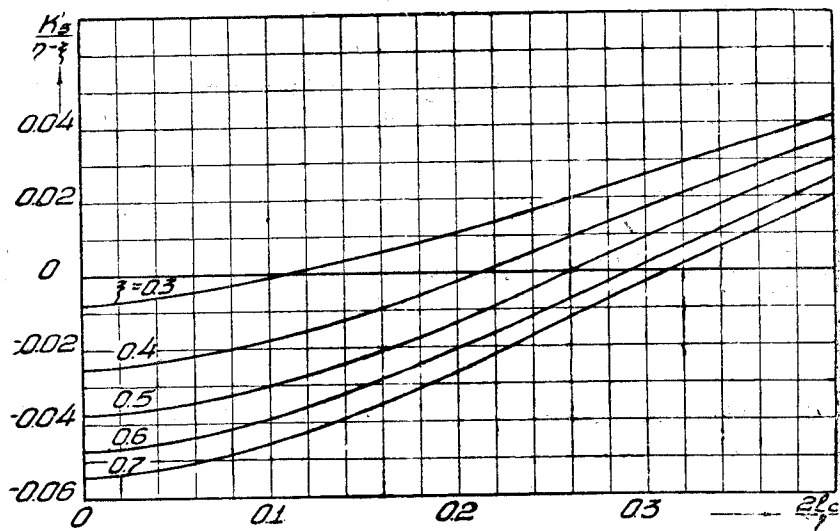
Фиг. 15.



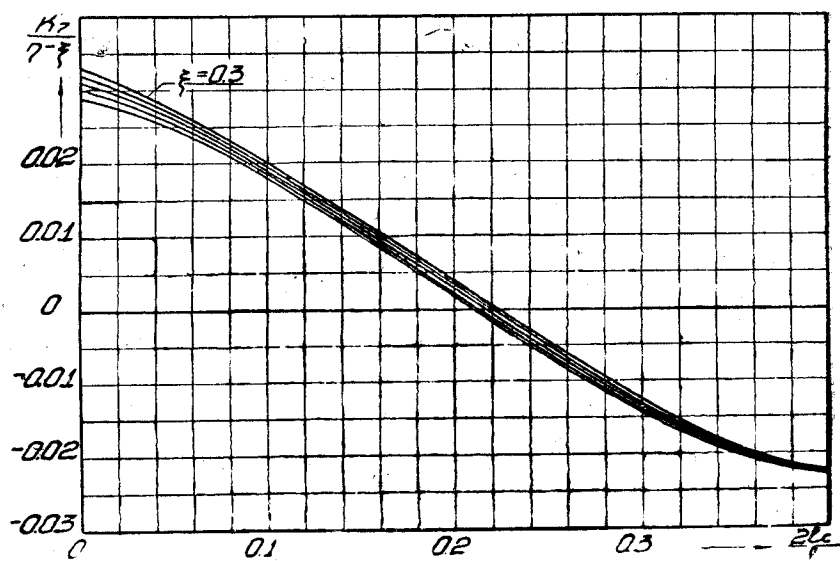
Фиг. 16.

Таблица 19

$K_7' / \eta - \xi$					
$\frac{2l_c}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,3	0,0330	0,0202	0,0041	-0,0127	-0,0226
0,4	0,0320	0,0196	0,0033	-0,0132	-0,0227
0,5	0,0310	0,0192	0,0027	-0,0136	-0,0228
0,6	0,0300	0,0187	0,0022	-0,0139	-0,0229
0,7	0,0288	0,0180	0,0015	-0,0144	-0,0230



Фиг. 17.



Фиг. 18.

Для определения коэффициента момента тангажа в формулу (18) гл. I подставим (см. фиг. 5):

$$\left. \begin{aligned} b &= \bar{b} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)] \\ C_{m_0} &= \bar{C}_{m_0} \frac{1 - \eta (\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)} \\ h &= \frac{l}{2} (\cos \theta - \cos \theta_c) \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{для} \\ 0 \leq \theta \leq \theta_c \end{array} \quad \left. \begin{aligned} b &= \bar{b} \\ C_{m_0} &= \bar{C}_{m_0} \\ h &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{для} \\ \theta_c \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array},$$

тогда:

$$C_{mz} = \frac{lb}{S} \bar{C}_{m_0} \left\{ \int_0^{\theta_c} \frac{1 - \eta (\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)]^2 \sin \theta d\theta + \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right\} + \\ + \bar{m} C_y + \frac{1}{2} a_0 \frac{l^2}{S} \operatorname{tg} \varphi \sum A_n \int_0^{\theta_c} \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin \theta d\theta \quad (43)$$

Решим интегралы:

$$I_1 = \int_0^{\theta_1} \frac{1 - \eta (\cos \theta - \cos \theta_c)}{1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)} [1 - \xi (\cos \theta - \cos \theta_c)]^2 \sin \theta d\theta + \int_{\theta_c}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - (\xi + \eta) \int_0^{\theta_c} (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin \theta d\theta + \xi \eta \int_0^{\theta_c} (\cos \theta - \cos \theta_c)^2 \sin \theta d\theta = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta - (\xi + \eta) \left[\frac{1}{2} \int_0^{\theta_c} \sin 2\theta d\theta - \cos \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta \right] + \\ + \xi \eta \left[\frac{1}{2} \int_0^{\theta_c} \sin 2\theta \cos \theta d\theta - \cos \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin 2\theta d\theta + \cos^2 \theta_c \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta \right] = \\ = 1 - \frac{\xi + \eta}{2} \left[\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 2 \cos \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right] + \\ + \xi \eta \left[\frac{1}{4} \left(1 - \cos \theta_c + \frac{1 - \cos 3\theta_c}{3} \right) - \cos \theta_c \frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} + \cos^2 \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right] = \\ = 1 - D \frac{\xi + \eta}{2} + E \xi \eta,$$

где

$$D = \left[\frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} - 2 \cos \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right]$$

и

$$E = \left[\frac{1}{4} \left(1 - \cos \theta_c - \frac{1 - \cos 3\theta_c}{3} \right) - \cos \theta_c \frac{1 - \cos 2\theta_c}{2} + \cos^2 \theta_c (1 - \cos \theta_c) \right].$$

Так как форма крыла в плане не изменилась, то значение второго интеграла осталось тем же, т. е.

$$\sum A_n \int_0^{\theta_c} \sin \theta (\cos \theta - \cos \theta_c) \sin n \theta d \theta = F_n A_n,$$

где

$$F_n = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(n-2)\theta_c}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\theta_c}{n+2} \right] - \begin{cases} \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\theta_c - \frac{\sin 2 \theta_c}{2} \right] & \text{при } n=1 \\ \frac{\cos \theta_c}{2} \left[\frac{\sin(n+1)\theta_c}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_c}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Подставляя в (43), получим:

$$\begin{aligned} C_{mz} &= \frac{i\bar{b}}{\bar{S}} \left[1 - D \frac{\eta + \xi}{2} + E \xi \eta \right] \bar{C}_{m_0} + \bar{m} C_y' + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\bar{S}} a_0 \operatorname{tg} \varphi \sum F_n A_n = \\ &= \frac{i\bar{b}}{\bar{S}} \left[1 - D \frac{\eta + \xi}{2} + E \xi \eta \right] \bar{C}_{m_0} + \left[\bar{m} + \frac{2}{\pi} \frac{l}{\bar{b}} \operatorname{tg} \varphi \bar{R} \right] C_y, \end{aligned} \quad (44)$$

где

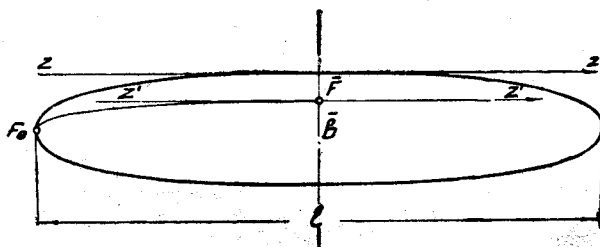
$$\bar{R}' = F_1 + F_3 \frac{A_3}{A_1} + F_5 \frac{A_5}{A_1} + F_7 \frac{A_7}{A_1}.$$

Численные значения величин: D , E и F_n в зависимости от отношения $\frac{2l_c}{l}$ приведены в таблицах 13, 14, 15.

Эллиптическое крыло

Закон изменения хорды по размаху крыла представится следующим образом (см. фиг. 19):

$$b = \bar{b} \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2} = \bar{b} \sin \theta,$$



Фиг. 19.

тогда разложение (12) гл. I напишется:

$$1 = \sum C_{2k} \cos 2k \theta.$$

Из сравнения коэффициентов при косинусах одинаковых дуг следует:

$$C_0 = 2; C_2 = C_4 = C_6 = \dots = 0.$$

Система уравнений (14) гл. I примет в этом случае простой вид:

$$B_n = (1 + n \bar{\mu}) A_n.$$

Рассмотрим эллиптическое крыло только с постоянным углом атаки по размаху, так как в этом случае, как мы увидим ниже, крыло имеет минимальное индуктивное сопротивление.

Коэффициенты B_n определяются по формуле (3):

$$B_n = \begin{cases} \bar{\alpha} & \text{при } n = 1 \\ 0 & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Система (15) превратится в одно уравнение:

$$\bar{\alpha} = (1 + \bar{\mu}) \bar{\alpha}, \quad (46)$$

т. е. все коэффициенты A_n за исключением A_1 обращаются в нули:

Коэффициент подъемной силы будет:

$$C_y = \frac{\pi l^2}{2S} \bar{\mu} A_1.$$

Коэффициент индуктивного сопротивления примет вид:

$$C_i = \frac{2\bar{S}}{\pi l^2} C_y^2,$$

Так как $N = \frac{\sum n A_n^2}{A_1^2} = 1$, коэффициент C_i будет иметь минимальное значение.

Наконец, определим коэффициент момента тангажа, для чего в формулу (18) гл. I положим (см. фиг. 19):

$$b = \bar{b} \sin \theta; \quad C_m = \bar{C}_{m_0}; \quad h = h_e (1 - \sin \theta)$$

получим:

$$C_{m_z} = \frac{\bar{l}\bar{b}}{\bar{S}} \bar{C}_{m_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta + \bar{m} C_y + \frac{l}{\bar{S}} a_0 h_e A_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta. \quad (47)$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

Подставляя в (47), будем иметь:

$$C_{m_z} = \frac{2}{3} \frac{\bar{l}\bar{b}}{\bar{S}} \bar{C}_{m_0} + \bar{m} C_y + \frac{l}{\bar{S}} a_0 h_e A_1 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\bar{l}\bar{b}}{\bar{S}} \bar{C}_{m_0} + \left[\bar{m} + \left(1 - \frac{8}{3\pi} \right) h_e \right] C_y. \quad (48)$$

Эллиптическим крылом закончим решение частных видов крыльев. При решении последних мы преследовали двоякую цель: 1) на конкретных примерах показать, как практически пользоваться изложенным методом, и 2) представить Конструкторскому бюро материал в виде таблиц и графиков для расчета крыльев, наиболее употребительных на практике. Из разобранных примеров следует, что благодаря разложению в ряд функций: $\alpha \sin \theta$ и $\frac{\bar{b}}{b(z)} \sin \theta$ достаточно точно учитывается любое изменение хорды и угла атаки по размаху крыла. Главная трудность заключается в определении коэффициентов B_n и C_{2k} , но она полностью окупается возможностью получить более точные результаты по сравнению с распространенным методом Треффа и простотой и легкостью последующих вычислений. Последнее особенно очевидно, когда часто приходится решать крыло одной и той же формы, варьируя некоторые его параметры. Представив в этом случае коэффициент B_n и C_{2k} в зависимости от этих параметров в виде таблиц или графиков, последующие вычисления производят механически по вышеизложенной схеме.

Глава III

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРЫЛЕ С ЭЛЕРОНАМИ И ЗАКРЫЛКАМИ МЕТОДОМ I. LOTZ

В этой главе изложенный выше метод будет разработан для крыльев с элеронами и закрылками произвольной длины. Решение этой задачи, как мы увидим ниже, сводится к решению задачи для крыла с прерывным углом атаки по размаху. Для существующих методов расчета монопланного крыла эта задача представляет большую трудность. В лучшем случае она приводит к недостаточно точным результатам при очень громоздких вычислениях. В частности Визельсбергер,* применяя метод Трефца к решению таких крыльев, обошел это затруднение следующим образом: он заменил точки разрыва переходной областью, помещая концы элеронов (закрылков) между двумя соседними сечениями, но тем самым он ввел в расчет длину элеронов (закрылков) в искаженном виде. Кроме того, решение свелось к системе 8 линейных уравнений с 8 неизвестными, что сильно затруднило получение численных результатов.

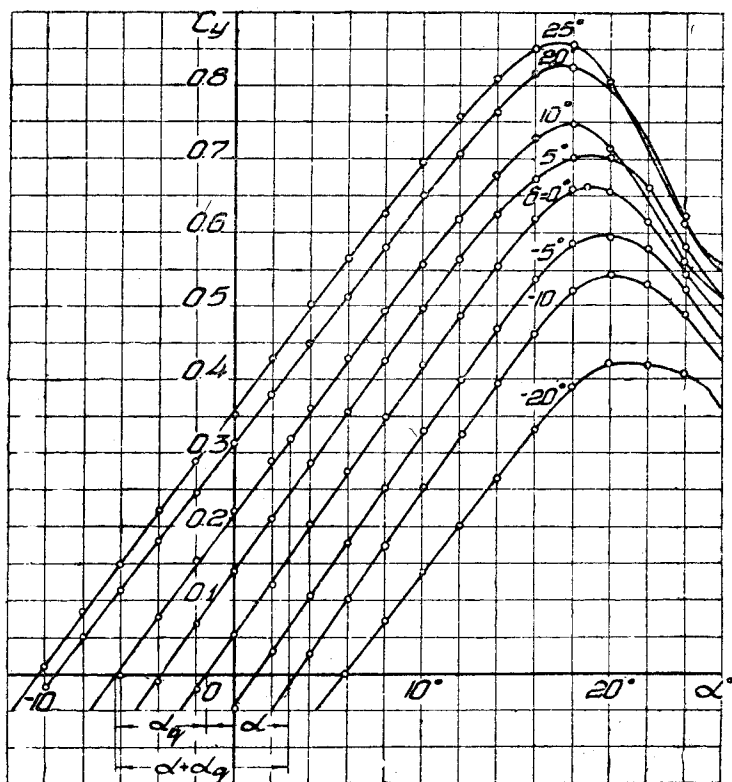
Для изложенного метода последнее не представляет никакой трудности, так как и в этом случае функцию угла атаки $\alpha \sin \theta$ можно представить в виде сходящегося ряда, причем интеграл для определения коэффициентов B_n придется разбить на два интервала: один, соответствующий крылу с элеронами (закрылками), второй — чистому крылу.

Для определенного отклонения элеронов (закрылков) рассмотрим изогнутый профиль крыла как новый профиль, у которого угол атаки и вогнутость по сравнению с первоначальным профилем изменились, причем аэродинамические характеристики нового профиля даны. Обозначим угол атаки в любом сечении крыла, неискаженном элеронами (закрылками), через α и угол атаки в каждом сечении изогнутого профиля, отнесенный к первоначальной хорде через $\alpha \mp \alpha_q$. Таким образом, решение крыла с элеронами (закрылками) сводится к решению крыла с прерывно изменяющимся углом атаки по размаху.

Теперь остановимся на величине и физическом смысле угла α_q . Так как мы условились, что измерение углов атаки будем всегда производить от такого положения крыла, когда подъемная сила обращается в нуль, то угол α_q есть, очевидно, разность между нулевыми углами атаки, неискаженного и изогнутого профиля. Практически он находится следующим образом: из испытания прямоугольного крыла с закрылком по всему размаху при различных углах отклонения последнего α_q является разностью углов, отсекаемой кривыми C_y по α на оси углов при $\delta = 0$ и δ — соответствующем данному углу отклонения последнего (см. фиг. 20). Физический

* Wieselsberger Theoretische Untersuchungen über die Querruderwirkung beim Tragflügel. Reports of the Aeronautical Research Institute, Tokyo, Imperial University. No. 30, 1927.

смысл угла α_q заключается в том, что им учитывается влияние хорды элеронов (закрылков), которая в явном виде в расчет не входит. В дальнейшем мы предполагаем: 1) $\alpha_q = \text{const}$, т. е. что при любой форме крыла в плане хорда элеронов (закрылков) в каждом сечении составляет один и тот же процент от хорды основного профиля; 2) силы, вызванные отклонением элеронов в разные стороны на один и тот же угол, равны по



Фиг. 20.

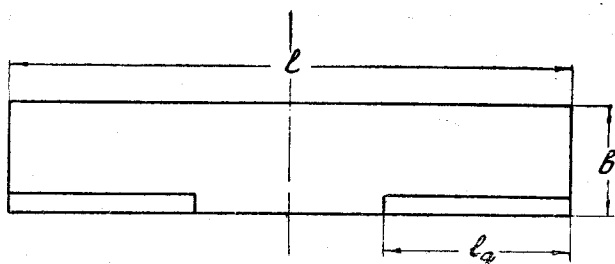
абсолютной величине и различаются по знаку. К сожалению, не для всех профилей можно заметить симметричное действие элеронов. В последнем случае, если асимметрия не слишком велика, можно получить достаточно верные результаты, принимая средние арифметические значения величин

$$a = \frac{dC_y}{d\alpha} \text{ и } \alpha_q \text{ для одинаковых отклонений элеронов в разные стороны.}$$

Наконец последнее замечание: циркуляцию крыла с элеронами (закрылками) можно себе представить состоящей из 2 частей: 1) из циркуляции крыла с заданным углом атаки по размаху и 2) из циркуляции крыла той же формы в плане с углом атаки 0° в середине и $\pm \alpha_q$ на конце, соответственно с длиной элеронов (закрылков). Циркуляция первого крыла нам известна, поэтому ниже мы ограничимся расчетом только второго крыла.

Крыло с элеронами

Обозначим длину одного элерона через l_q , тогда закон изменения угла атаки по размаху крыла может быть представлен (см. фиг. 21):



Фиг. 21.

$$\begin{aligned}\alpha(z, l_q) &= \alpha - \alpha_q & \text{для } -\frac{l}{2} \leq z \leq -\frac{l}{2} + l_q \\ &= \alpha & \text{для } -\frac{l}{2} + l_q \leq z \leq \frac{l}{2} - l_q \\ &= \alpha + \alpha_q & \text{для } \frac{l}{2} - l_q \leq z \leq \frac{l}{2}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\alpha(\theta, l_q) &= \alpha - \alpha_q & \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_q \\ &= \alpha & \text{для } \theta_q \leq \theta \leq \pi - \theta_q \\ &= \alpha + \alpha_q & \text{для } \pi - \theta_q \leq \theta \leq \pi,\end{aligned}$$

где через θ_q обозначен угол, соответствующий длине элерона и величина которого определяется из уравнения:

$$-\cos \theta_q = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{2} + l_q \right).$$

Определяя только эффект отклонения элеронов, закон изменения угла атаки по размаху будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\alpha(l_q) &= -\alpha_q & \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_q \\ &= 0 & \text{для } \theta_q \leq \theta \leq \pi - \theta_q \\ &= \alpha_q & \text{для } \pi - \theta_q \leq \theta \leq \pi\end{aligned}$$

Коэффициенты B_n соответственно равны:

$$B_n = -\frac{4}{\pi} \alpha_q \int_0^{\theta_q} \sin \theta \sin n \theta d\theta, \quad (1)$$

где n — принимает только четные значения.

Вычислим интеграл:

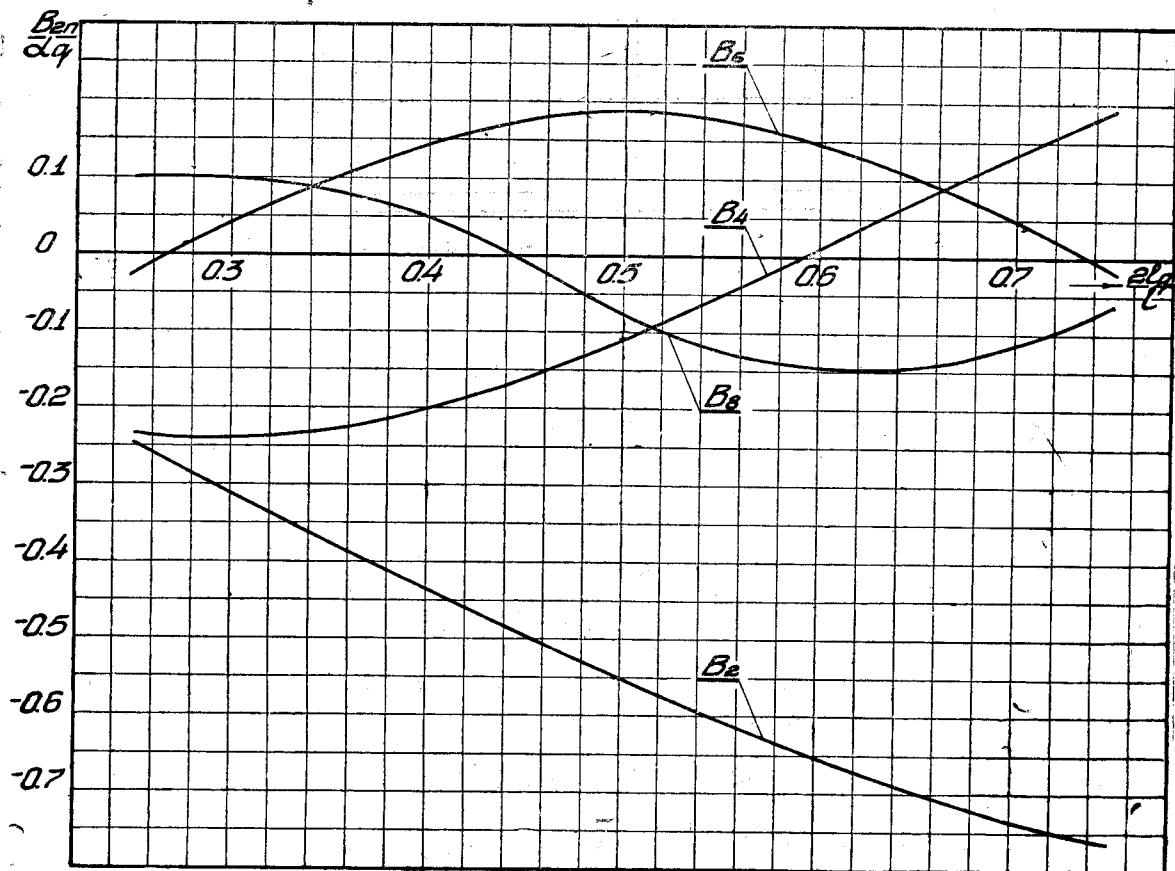
$$\int_0^{\theta_q} \sin \theta \sin n \theta d\theta = \frac{\sin (n-1)\theta_q}{2(n-1)} - \frac{\sin (n+1)\theta_q}{2(n+1)}.$$

Подставляя в (1), получим:

$$B_n = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin (n-1)\theta_q}{n-1} - \frac{\sin (n+1)\theta_q}{n+1} \right] \cdot \alpha_q \quad (2)$$

Численные значения коэффициентов $\frac{B_n}{\alpha_q}$ в зависимости от отношения

$\frac{2l_q}{l}$ — представлены в табл. 20 и на фиг. 22.



Фиг. 22.

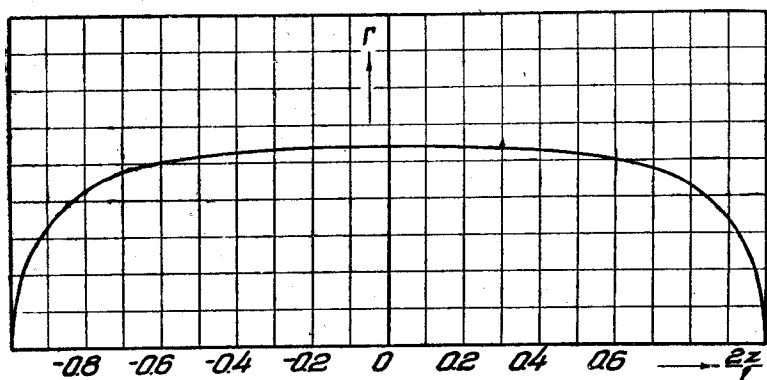
Таблица 20

$\frac{B_n}{\alpha_q} \backslash \frac{2l_q}{l}$	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750
$\frac{B_2}{\alpha_q}$	-0,2451	-0,4050	-0,5515	-0,6765	-0,7650
$\frac{B_4}{\alpha_q}$	-0,2335	-0,2162	-0,1100	0,0427	0,1920
$\frac{B_6}{\alpha_q}$	-0,0267	0,1227	0,1890	0,1253	-0,0202
$\frac{B_8}{\alpha_q}$	0,1005	0,0706	-0,0787	-0,1485	-0,0636

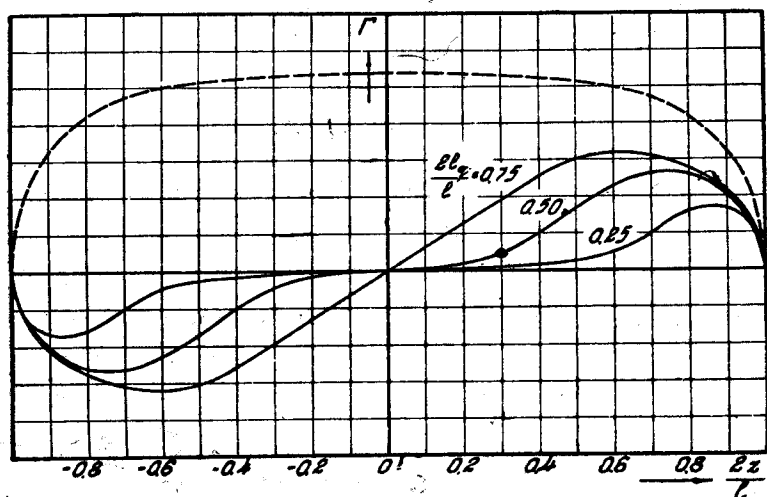
На фиг. 23 а, б, в представлены кривые распределения циркуляции по размаху прямоугольного крыла:

- а) при постоянном угле атаки по размаху,
- б) эффект отклонения элеронов,
- в) суммарное распределение, по крылу с элеронами, которое получается путем совмещения фиг. 23 а и б.

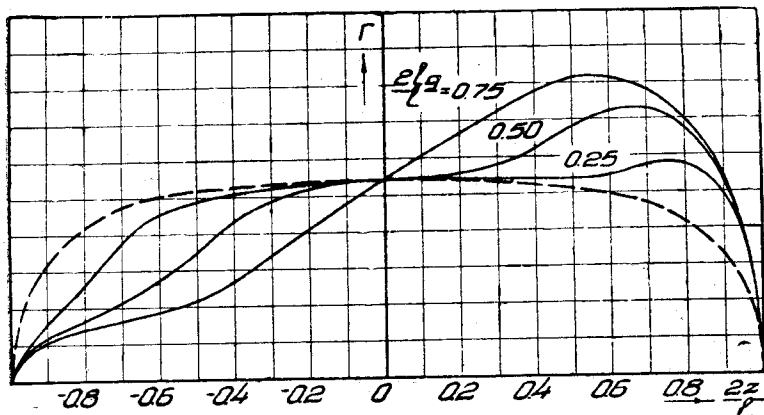
Из фиг. 23 б следует, что циркуляция падает к середине крыла различными путями в зависимости от длины элерона и у среднего отрезка с углом атаки 0° есть некоторая циркуляция, вследствие имеющегося там скоса потока.



Фиг. 23 а.



Фиг. 23 б



Фиг. 23 в.

Момент крена

За счет несимметричного распределения подъемной силы у крыла с элеронами возникает момент крена M_x .

Величину последнего получим, умножая подъемную силу элемента крыла на расстояние от середины и проинтегрировав по размаху:

$$M_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho V \Gamma dz = -\frac{\rho V^2}{2} \frac{l^3}{2} \sum A_n \int_0^\pi \sin 2\theta \sin n\theta d\theta \quad (3)$$

Но интеграл:

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } n=2 \\ 0 & \text{при } n \neq 2 \end{cases}$$

Подставляя в (3), будем иметь:

$$M_x = -\frac{\rho V^2}{2} \frac{l^3}{2} A_2$$

Так как коэффициент A_2 пропорционален α_q , то поперечный момент может быть представлен:

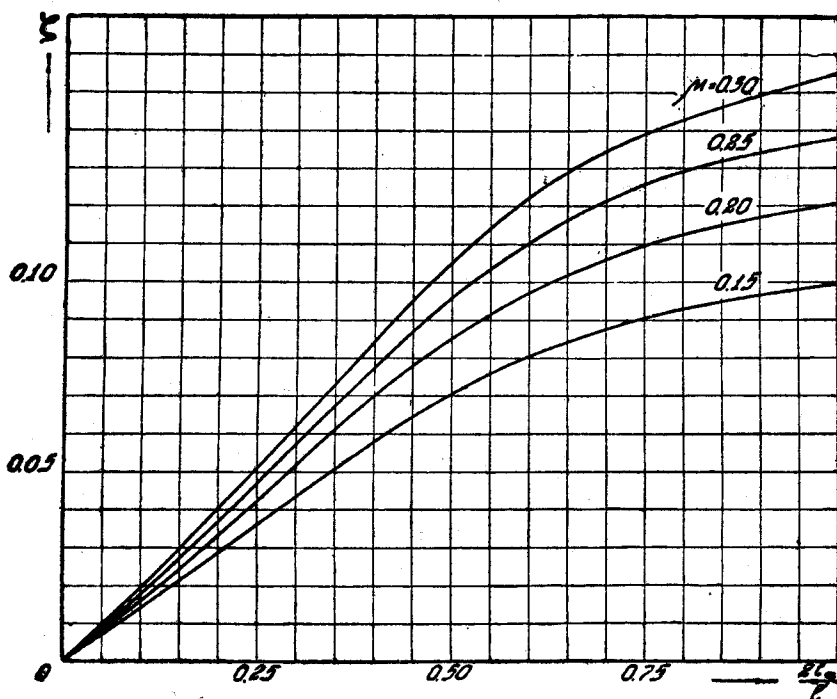
$$M_x = -\frac{\rho V^2}{2} l^3 \zeta \alpha_q, \quad (4)$$

где

$$\zeta = \frac{\pi}{4} \frac{A_2}{\alpha_q}$$

Представим момент крена через абсолютный коэффициент C_{m_x}

$$M_x = C_{m_x} \rho S V^2 l.$$



Фиг. 24.

Сравнивая правые части, получим:

$$C_{m_x} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} \zeta \alpha_q \quad (5)$$

В таблице 21 и на фиг. 24 представлена величина ζ для прямоугольного крыла в зависимости от отношения $\frac{2l_c}{l}$ при различных значениях параметра $\bar{\mu}$.

Таблица 21

ζ					
$\bar{\mu} \backslash \frac{2l_c}{l}$	0,25	0,50	0,75	1,00	
0,15	— 0,0362	— 0,0707	— 0,0909	— 0,0999	
0,20	— 0,0423	— 0,0850	— 0,1098	— 0,1205	
0,25	— 0,0473	— 0,0958	— 0,1260	— 0,1380	
0,30	— 0,0583	— 0,1053	— 0,1392	— 0,1550	

Добавочное индуктивное сопротивление

Суммарная подъемная сила крыла не изменяется при отклонении элеронов, но распределение будет несимметричным, сильно отклонится от эллиптического и тем самым вызовет дополнительное индуктивное сопротивление.

Общее индуктивное сопротивление крыла с элеронами будет:

$$Q_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho \Gamma W dz = \rho l^2 V^2 \bar{\mu}^2 \sum_{n,m} n A_n A_m \int \sin n \theta \sin m \theta d \theta,$$

где n и m принимают как нечетные так и четные значения.

Интеграл:

$$\int_0^\pi \sin n \theta \sin m \theta d \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

Следовательно:

$$Q_i = \frac{\rho V^2}{2} l^2 \bar{\mu}^2 \pi \sum n A_n^2$$

Это же выражение можно написать в таком виде:

$$Q_i = \frac{\rho V^2}{2} l^2 \bar{\mu}^2 \pi \left[\sum (2n-1) A_{2n-1}^2 + \sum 2n A_{2n}^2 \right].$$

Сумма нечетных членов представляет собой, как обычно, сопротивление при симметричном распределении подъемной силы, а четные члены—добавочное сопротивление, благодаря отклонению элеронов.

Отсюда, дополнительное индуктивное сопротивление будет:

$$Q_{iq} = \frac{\rho V^2}{2} \bar{\mu}^2 l^2 \pi \sum 2n A_{2n}^2. \quad (6)$$

Коэффициенты A_{2n} пропорциональны α_q , следовательно, дополнительное индуктивное сопротивление возрастает пропорционально квадрату α_q .

Обозначим через $\eta = \pi \bar{\mu}^2 \sum 2n \left(\frac{A_{2n}}{\alpha_q} \right)^2$, тогда выражение (6) примет вид:

$$Q_{iq} = \frac{\rho V^2}{2} l^2 \eta \alpha_q^2. \quad (7)$$

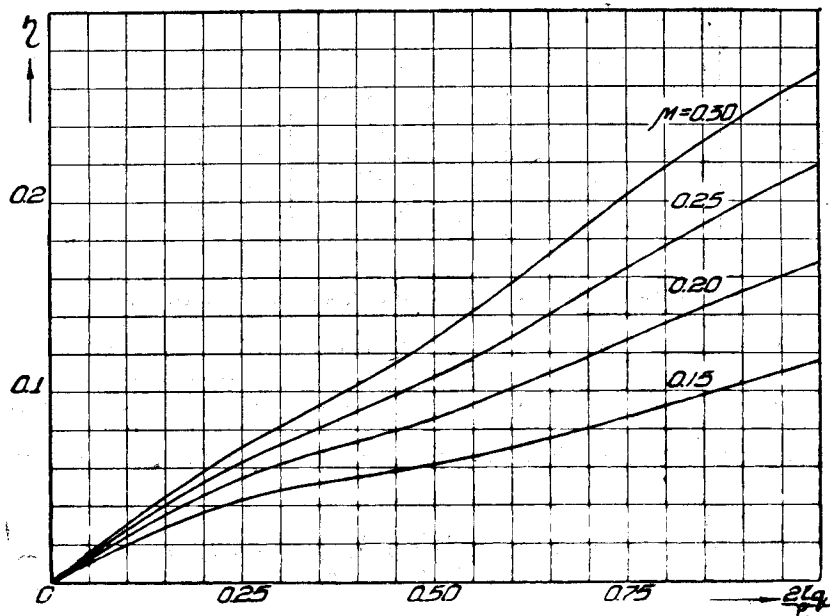
Представим выражение (7) через абсолютный коэффициент C_{iq}

$$Q_{iq} = C_{iq} \rho S V^2.$$

Из сравнения правых частей этих выражений следует:

$$C_{iq} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} \eta \alpha_q^2 \quad (8)$$

Нами вычислены значения величин η для прямоугольного крыла в зависимости от отношения $\frac{2l_q}{l}$ при различных значениях параметра $\bar{\mu}$. Результаты представлены в таблице 22 и на фиг. 25.



Фиг. 25.

Таблица 22

η				
$\bar{\mu} \backslash \frac{2l_q}{l}$	0,25	0,50	0,75	1,00
0,15	0,0439	0,0616	0,0866	0,1160
0,20	0,0549	0,0852	0,1266	0,1682
0,25	0,0638	0,1076	0,1658	0,2195
0,30	0,0713	0,1276	0,2029	0,2682

Момент рысканья

Теперь определим индуктивный момент рысканья M_{yq} , который возникает благодаря различному индуктивному сопротивлению на обеих половинах крыла. Для получения последнего, умножим индуктивное сопротивление элемента крыла на расстоянии от середины и проинтегрируем по размаху:

$$M_{yq} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho W \Gamma z dz = \frac{\rho V^2}{2} l^3 \bar{\mu}^2 \sum_{n,m} n A_n A_m \int_0^\pi \cos \theta \sin m \theta \sin n \theta d\theta, \quad (9)$$

где m и n принимают как четные, так и нечетные значения.

Вычислим интеграл:

$$I = \int_0^{\pi} \sin n \theta \sin m \theta \cos \theta d \theta \quad (10)$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \sin n \theta \sin m \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} [\cos (n-m) \theta - \cos (n+m) \theta] \cos \theta = \\ &= \frac{1}{4} [\cos (n-m-1) \theta + \cos (n-m+1) \theta - \cos (n+m-1) \theta - \cos (n+m+1) \theta] \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (10) и проинтегрировав его, получим

$$I = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin (n-m-1) \theta}{n-m-1} + \frac{\sin (n-m+1) \theta}{n-m+1} - \frac{\sin (n+m-1) \theta}{n+m-1} + \frac{\sin (n+m+1) \theta}{n+m+1} \right]_0^{\pi} \quad (11)$$

При подстановке пределов выражение (11) обращается в нуль. Исключение представляет тот случай, когда один из знаменателей обращается в нуль, но тогда соответствующее слагаемое подынтегральной функции в выражении (10) обращается в единицу и после интегрирования и подстановки пределов интеграл равен $\frac{\pi}{4}$.

Из рассмотрения знаменателей дробей выражения (11) следует, что один из них обращается в нуль, когда значения величин m и n отличаются только на единицу.

На основании этих соображений:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin n \theta \sin m \theta \cos \theta d \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } n = m \pm 1 \\ 0 & \text{при } n \neq m \pm 1 \end{cases}$$

Подставляя в выражение (9), получим:

$$\begin{aligned} M_{yq} &= \frac{\rho V^2}{2} l^3 \bar{\mu}^2 \frac{\pi}{2} [3 A_1 A_2 + 5 A_2 A_3 + 7 A_3 A_4 + \dots] = \\ &= \frac{\rho V^2}{2} l^3 \bar{\mu}^2 \frac{\pi}{2} \sum (2n+1) A_n A_{n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

Из выражения (12) следует, что момент рысканья зависит также от коэффициентов $A_1; A_3; A_5; \dots$ симметричного распределения циркуляции:

$$\text{Обозначим через } \xi = \frac{\pi}{4} \bar{\mu}^2 \sum (2n+1) \frac{A_n}{\alpha_q} \frac{A_{n+1}}{\alpha},$$

тогда момент рысканья может быть представлен

$$M_{yq} = \frac{\rho V^2}{2} l^3 \xi \alpha \alpha_q. \quad (13)$$

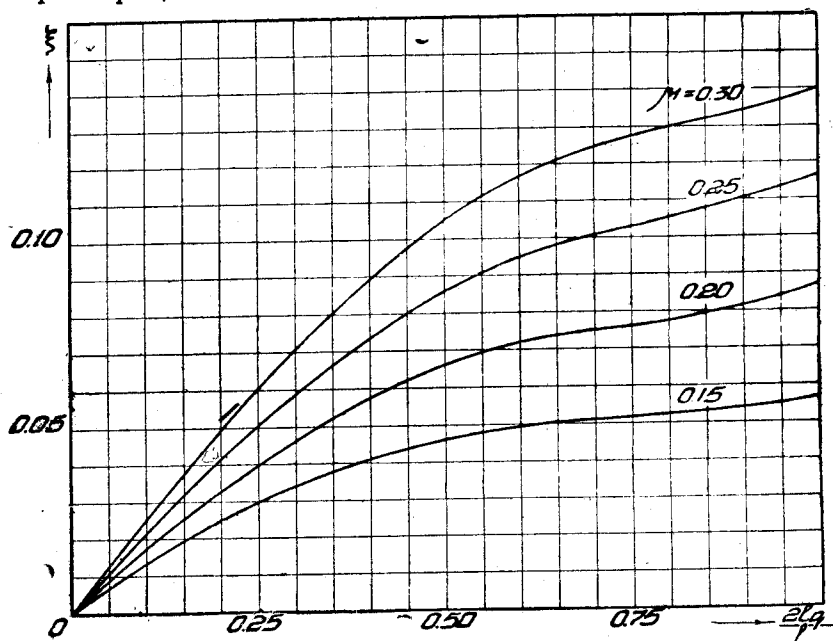
Выразим момент рысканья крыла через абсолютный коэффициент C_{myq} :

$$M_{yq} = C_{myq} \rho S V^2.$$

Из сравнения правых частей этих равенств следует:

$$C_{myq} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} \xi \alpha \alpha_q. \quad (14)$$

В таблице 23 и на фиг. 26 представлены значения величины ξ для прямоугольного крыла в зависимости от отношения $\frac{2l_q}{l}$ при различных значениях параметра μ .



Фиг. 26.

Таблица 23

ξ				
$\frac{2l_q}{l}$	0,25	0,50	0,75	1,00
μ				
0,15	-0,0302	-0,0465	-0,0518	-0,0567
0,20	-0,0408	-0,0668	-0,0764	-0,0871
0,25	-0,0509	-0,0867	-0,1032	-0,1165
0,30	-0,0602	-0,1060	-0,1279	-0,1395

Крыло с закрылками

Обозначим длину одного закрылка через l_k , тогда закон изменения угла атаки по размаху крыла может быть представлен следующим образом:

$$\alpha(z, l_k) = \alpha \pm \alpha_k \quad \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_k$$

$$= \alpha \quad \text{для } \theta_k \leq \theta \leq \pi - \theta_k$$

$$= \alpha \pm \alpha_k \quad \text{для } \pi - \theta_k \leq \theta \leq \pi,$$

где θ_k — угол, соответствующий длине закрылка и величина которого определяется из уравнения:

$$\cos \theta_k = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{2} + l_k \right).$$

Как и в случае крыла с элеронами, определим только эффект отклонения закрылков, тогда изменение угла атаки по размаху будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \alpha(l_k) &= \pm \alpha_k && \text{для } 0 \leq \theta \leq \theta_k \\ &= 0 && \text{для } \theta_k \leq \theta \leq \pi - \theta_k \\ &= \pm \alpha_k && \text{для } \pi - \theta_k \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Коэффициенты B_n определяются по формуле:

$$B_n = \pm \frac{4}{\pi} \alpha_k \int_0^{\theta_k} \sin \theta \sin n \theta d\theta,$$

где n — принимает только нечетные значения.

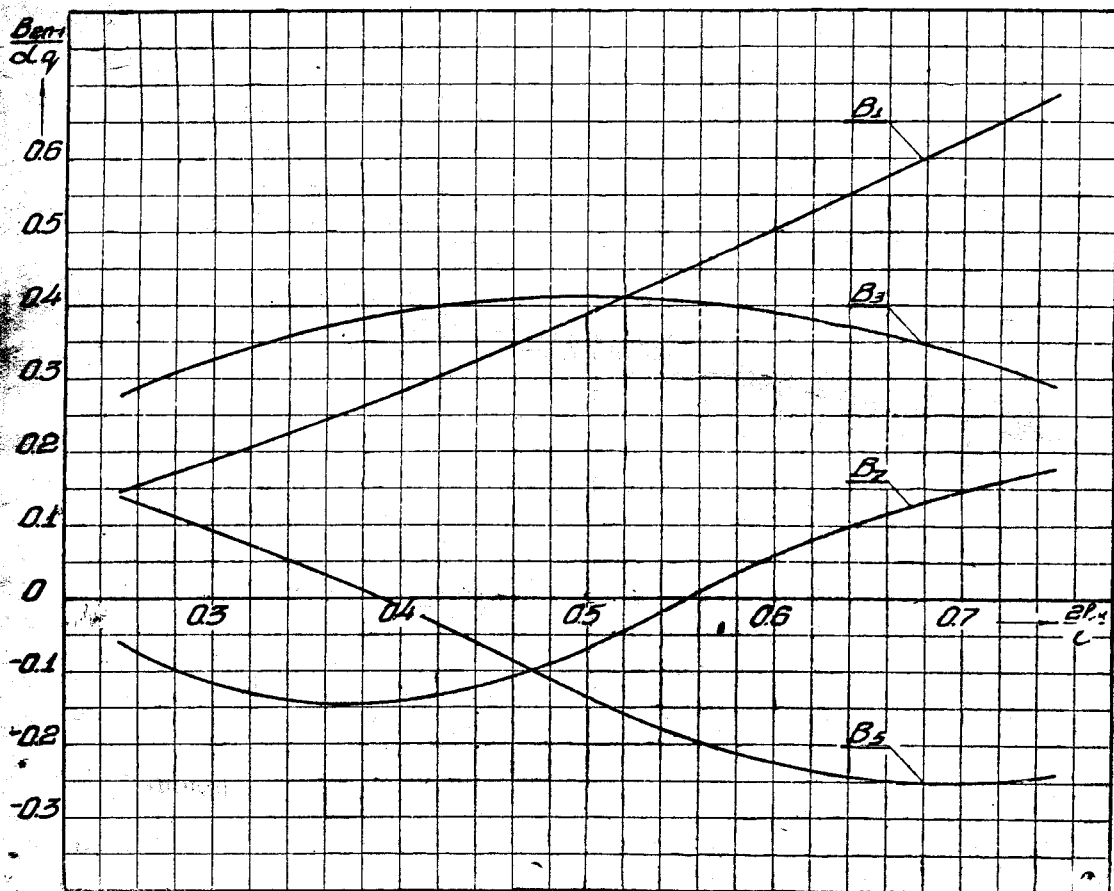
Вычислим интеграл:

$$\int_0^{\theta_k} \sin \theta \sin n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\theta_k - \frac{\sin 2\theta_k}{2} \right) & \text{при } n=1. \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-1)\theta_k}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_k}{n+1} \right] & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

Подставляя в выражение (15), окончательно будем иметь:

$$B_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\theta_k - \frac{\sin 2\theta_k}{2} \right] \alpha_k & \text{при } n=1. \\ \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\theta_k}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_k}{n+1} \right] \alpha_k & \text{при } n \neq 1. \end{cases}$$

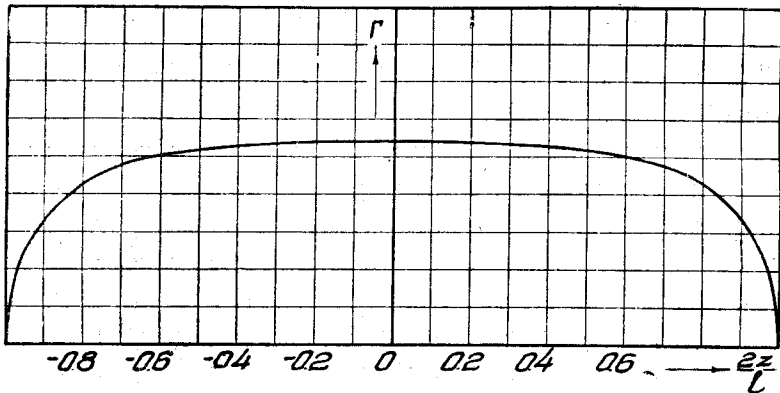
Значения коэффициентов $\frac{B_n}{\alpha_k}$ в зависимости от отношения $\frac{2l_k}{l}$ представлены в таблице 24 и на фиг. 27.



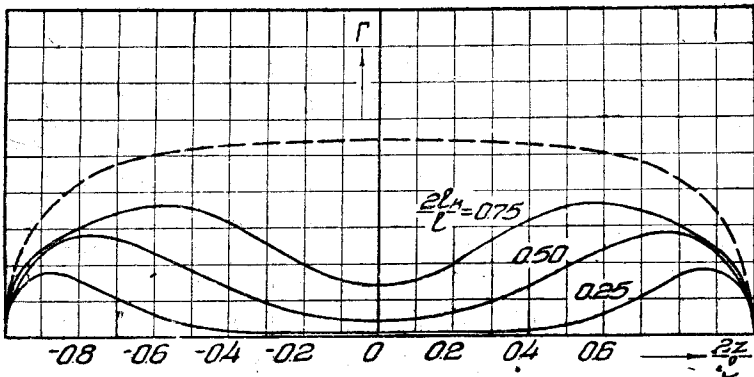
Фиг. 27.

Таблица 24

$\frac{2l_k}{l} \backslash \frac{B_n}{\alpha_k}$	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750
$\frac{B_1}{\alpha_k}$	0,1450	0,2590	0,3895	0,5335	0,6050
$\frac{B_R}{\alpha_k}$	0,2750	0,3780	0,4135	0,3800	0,2890
$\frac{B_5}{\alpha_k}$	0,1380	0,0157	-0,1378	-0,2375	-0,2405
$\frac{B_7}{\alpha_k}$	-0,0598	-0,1455	-0,0690	0,0843	0,1770



Фиг. 28 а.



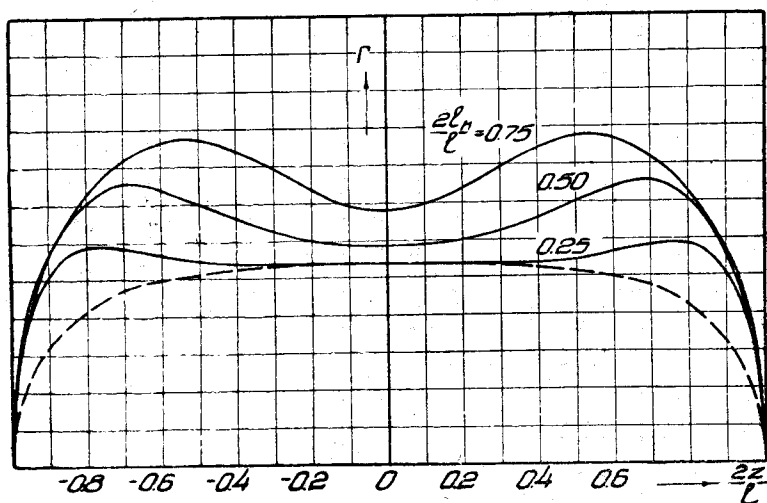
Фиг. 28 б.

На фиг. 28 а, б, с, представлены кривые распределения циркуляции по размаху прямоугольного крыла:

- а) при постоянном угле атаки по размаху,
- б) эффект отклонения закрылков,

с) суммарное распределение по крылу с закрылками, которое получается совмещением распределения циркуляции фиг. 28 а и б.

Вследствие имеющегося восходящего склона потока в средней части крыла с углом атаки 0° , получаем в этой части циркуляцию, которая тем больше, чем длиннее закрылки (см. фиг. 28 б).



Фиг. 28 с.

У крыла с закрылками, вследствие симметричного распределения подъемной силы, не возникают моменты, поэтому вычислим только добавочную подъемную силу и индуктивное сопротивление.

Добавочная подъемная сила

Добавочная подъемная сила может быть представлена:

$$P_k = \frac{\rho V^2}{2} \pi l^2 \mu A_1,$$

так как коэффициент A_1 пропорционален α_k , поэтому выражение для подъемной силы мы можем написать также в виде:

$$P_k = \frac{\rho V^2}{2} l^2 \lambda \alpha_k, \quad (17)$$

где:

$$\lambda = \pi \mu \frac{A_1}{\alpha_k}$$

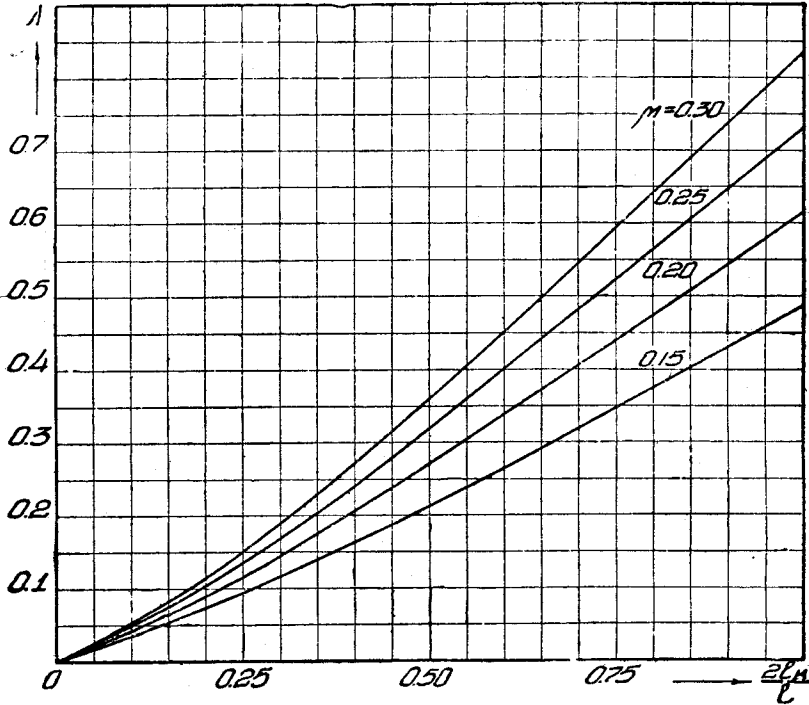
Выразим подъемную силу через абсолютный коэффициент C_{y_k} :

$$P_k = C_{y_k} \rho S V^2$$

Сравнивая эти выражения, получим:

$$C_{y_k} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} \lambda \alpha_k \quad (18)$$

Численные значения λ для прямоугольного крыла, в зависимости от отношения $\frac{2l_k}{l}$ при различных значениях параметра μ , представлены в таблице 25 и на фиг. 29.



Фиг. 29.

Таблица 25

λ				
$\frac{2l_k}{l}$	0,25	0,50	0,75	1,00
μ				
0,15	0,0947	0,2118	0,3520	0,4860
0,20	0,1150	0,2719	0,4416	0,6140
0,25	0,1381	0,3187	0,5225	0,7294
0,30	0,1491	0,3620	0,5950	0,8347

Добавочное индуктивное сопротивление

Индуктивное сопротивление крыла с закрылками представится в виде:

$$Q_{ik} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho \Gamma W dz = \rho l^2 V^2 \bar{\mu}^2 \sum_{m,n} n A_n A_m \int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta d\theta,$$

где n и m принимают только нечетные значения.

Но интеграл

$$\int_0^\pi \sin m \theta \sin n \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Следовательно:

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \rho V^2 l^2 \bar{\mu}^2 \pi \sum n A_n^2 \quad (19)$$

В этом случае каждый коэффициент A_n распадается на сумму двух членов, один из которых пропорционален α , второй α_k .

$$A_n = A'_n \alpha + A''_n \alpha_k.$$

поэтому выражение (19) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= \frac{1}{2} \rho V^2 l^2 \bar{\mu}^2 \pi \sum n (A'_n \alpha + A''_n \alpha_k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 l^2 \bar{\mu}^2 \pi \left[\sum n A_n'^2 \alpha^2 + 2 \sum n A_n' A_n'' \alpha \alpha_k + \sum n A_n''^2 \alpha_k^2 \right]. \end{aligned}$$

Первая сумма представляет собой сопротивление крыла с неотклоненными закрылками, остальные две суммы—добавочное сопротивление благодаря отклонению закрылков.

Отсюда дополнительное индуктивное сопротивление будет:

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \rho V^2 l^2 \bar{\mu}^2 \pi \left[2 \sum n A_n' A_n'' \alpha \alpha_k + \sum n A_n''^2 \alpha_k^2 \right].$$

Из этого выражения следует, что добавочное индуктивное сопротивление в этом случае зависит также от коэффициентов A_n' —распределения циркуляции с неотклоненными закрылками.

Обозначим через

$$\chi_1 = 2\pi \bar{\mu}^2 \sum n A_n' A_n''$$

и через

$$\chi_2 = \pi \bar{\mu}^2 \sum n A_n''^2,$$

тогда

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \rho V^2 l^2 \left[\chi_1 \alpha \alpha_k + \chi_2 \alpha_k^2 \right] \quad (20)$$

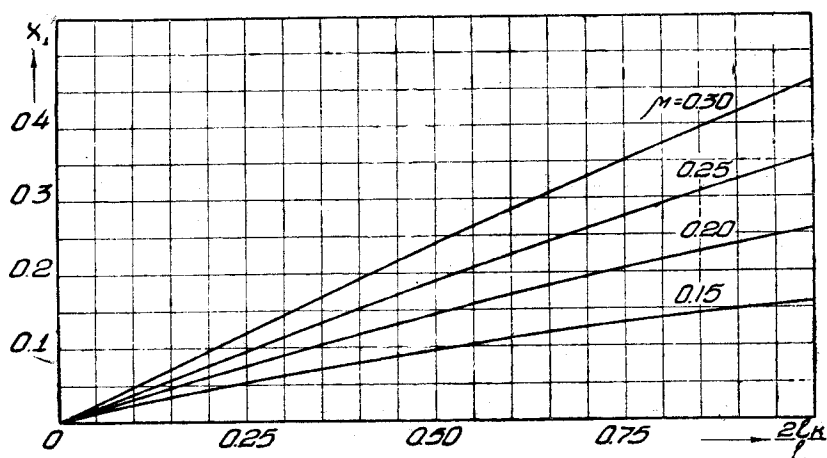
Представим индуктивное сопротивление через абсолютный коэффициент C_{ik}

$$Q_{ik} = C_{ik} \rho S V^2.$$

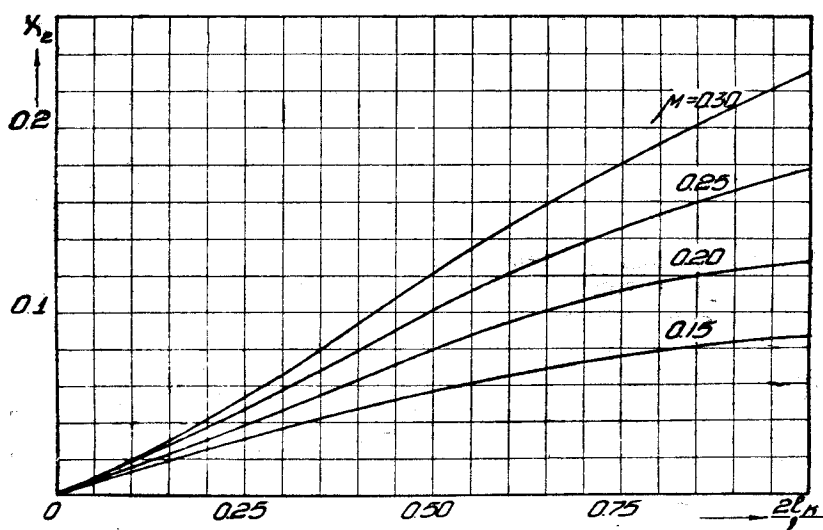
Сравнивая правые части, получим:

$$C_{ik} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{S} \left[\chi_1 \alpha \alpha_k + \chi_2 \alpha_k^2 \right] \quad (21)$$

В таблицах 26 и 27 и на фиг. 30 и 31 представлены величины χ_1 и χ_2 для прямоугольного крыла, в зависимости от отношения $\frac{2l_k}{l}$ при различных значениях параметра μ .



Фиг. 30.



Фиг. 31.

Таблица 26

χ_1				
$\mu \backslash \frac{2l_k}{l}$	0,25	0,50	0,75	1,00
0,15	0,0553	0,0971	0,1329	0,1636
0,20	0,0768	0,1437	0,2010	0,2553
0,25	0,0979	0,1919	0,2779	0,3561
0,30	0,1182	0,2407	0,3515	0,4614

Таблица 27

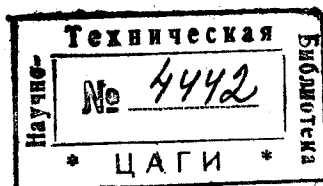
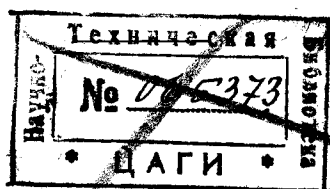
χ_2				
$\frac{2 l_k}{l}$ μ	0,25	0,50	0,75	1,00
0,15	0,0302	0,0569	0,0753	0,0818
0,20	0,0390	0,0799	0,1124	0,1977
0,25	0,0466	0,1016	0,1458	0,1780
0,30	0,0530	0,1218	0,1804	0,2304

Summary

A method of aerodynamical design of a monoplane wing, developed J. Lotz * is extended by the author on special types of wings. Owing to expansion of the the incidence and wing chord functions, the above mentioned method allows to solve the problem of a wing of an arbitrary form and leads to a system of linear equations, which may be easily solved by step by step method; the convergency is so fast that the third approximation practically does not give new values of unknowns.

The article is divided in three parts: in the first part the basic integ equation is derived and its solution by the Lotz method is given. Also method of deriving formulae for the lift, induced drag and pitching moment is shown. In the second part the method is extended on conventional type of wings. The obtained results are presented in the form of tables and charts.

In the third part the above mentioned method is extended on the case wings with ailerons and flaps. Formulae for the additional lift, induced drag and rolling and yawing moments of these devices are developed.



* Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. ZFM, № 7, 1931.